গণিত প্রকাশ

নবম শ্রেণি

এই পুস্তকটি পশ্চিমবঙ্গ সরকারের আর্থিক আনুকূল্যে কেবলমাত্র সরকারি, সরকার পোষিত ও সরকারি অনুদানপ্রাপ্ত বিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রীদের বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ

ভারতের সংবিধান

<u>প্রস্তাবনা</u>

আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে একটি **সার্বভৌম সমাজতান্ত্রিক ধর্মনিরপেক্ষ গণতান্ত্রিক সাধারণতন্ত্র** রূপে গড়ে তুলতে সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করছি এবং তার সকল নাগরিক যাতে: সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক **ন্যায়বিচার**; চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার **স্বাধীনতা**; সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের **সমতা** প্রতিষ্ঠা করতে পারে এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তি-সম্ভ্রম ও জাতীয় ঐক্য এবং সংহতি সুনিশ্চিত করে **সৌভ্রাতৃত্ব** গড়ে তুলতে; **আমাদের গণপরিষদে**, আজ, 1949 সালের 26 নভেম্বর, **এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ করছি, বিধিবদ্ধ করছি** এবং **নিজেদের অর্পণ করছি**।

THE CONSTITUTION OF INDIA

<u>PREAMBLE</u>

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens : JUSTICE, social, economic and political; LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship; EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all – FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation; IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

ভূমিকা

জাতীয় পাঠক্রমের রূপরেখা ২০০৫ এবং শিক্ষা অধিকার আইন ২০০৯ দলিলদুটিকে গুরুত্ব দিয়ে ২০১১ সালে পশ্চিমবঙ্গ সরকার কর্তৃক গঠিত 'বিশেষজ্ঞ কমিটি'কে বিদ্যালয়স্তরের পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকগুলির সমীক্ষা ও পুনর্বিবেচনার দায়িত্ব দেওয়া হয়েছিল। এই কমিটির বিষয় বিশেষজ্ঞদের আন্তরিক চেষ্টা ও নিরলস পরিশ্রমের ফসল হলো এই বইটি।

এই গণিত বইটি নবম শ্রেণির পাঠ্যসূচি অনুযায়ী প্রণয়ন করা হয়েছে ও নামকরণ করা হয়েছে 'গণিত প্রকাশ'। বইটিতে গণিতকে ভাষা হিসাবে চর্চা করার প্রতিষ্ঠিত ধারা অনুসৃত হয়েছে যাতে করে গণিতের ভাষায় ভাষান্তরিত সমস্যাটি দেখে শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারে সংশ্লিষ্ট সমস্যায় কোন গাণিতিক প্রক্রিয়া, সূত্র বা পদ্ধতি প্রয়োগের প্রয়োজন।

পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি বিষয়গুলিকে সুন্দর ও সহজভাষায় এমনভাবে বর্ণনা করা হয়েছে যাতে করে সমস্ত শিক্ষার্থী ভালোভাবে বিষয়টি আয়ত্ত করতে পারে। গণিতকে শিক্ষার্থীর ব্যক্তি জীবন, পরিবার ও সমাজের নানা সমস্যা সমাধানের সফল হাতিয়ার হিসাবে প্রতিষ্ঠিত করার চেষ্টাকে অধিকতর ভালোভাবে প্রসারিত করা হয়েছে।

প্রথিতযশা শিক্ষক, শিক্ষাপ্রেমী শিক্ষাবিদ, বিষয় বিশেষজ্ঞ ও অলংকরণের জন্য বিখ্যাত শিল্পীবৃন্দ — যাঁদের ঐকান্তিক চেষ্টায় ও নিরলস পরিশ্রমের ফলে এই সর্বাঙ্গসুন্দর গুরুত্বপূর্ণ বইটির প্রকাশ সম্ভব হয়েছে তাঁদের সকলকে পর্ষদের পক্ষ থেকে আন্তরিক ধন্যবাদ ও কৃতজ্ঞতা জানাই।

এই প্রকল্পকে কার্যকরী করার জন্য মাননীয় শিক্ষামন্ত্রী ড. পার্থ চ্যাটার্জী, পশ্চিমবঙ্গ সরকার, পশ্চিমবঙ্গ সরকারের বিদ্যালয় শিক্ষাদপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ বিদ্যালয় শিক্ষা অধিকার এবং পশ্চিমবঙ্গ সর্বশিক্ষা মিশন সাহায্য করে পর্ষদকে কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করেছেন।

আশা করি পর্ষদ প্রকাশিত এই 'গণিত প্রকাশ' বইটি শিক্ষার্থীদের কাছে গণিতের বিষয়গুলি আকর্ষণীয় করে তুলতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করবে এবং মাধ্যমিকস্তরে গণিতচর্চার মান উন্নততর করতে সহায়ক হবে। ছাত্রছাত্রীরাও উদ্বুদ্ধ হবে। এইভাবে সার্থক হবে পর্ষদের সামাজিক দায়বদ্ধতা।

সমস্ত শিক্ষাপ্রেমী, শিক্ষিকা/শিক্ষক ও সংশ্লিষ্ট সকলের কাছে আমার সনির্বন্ধ অনুরোধ তাঁরা যেন বিনা দ্বিধায় বইটির ত্রুটি-বিচ্যুতি পর্ষদের নজরে আনেন যাতে করে পরবর্তী সংস্করণে সংশোধনের সুযোগ পাওয়া যায়। এতে বইটির মান উন্নত হবে এবং ছাত্রসমাজ উপকৃত হবে। ইংরেজিতে একটি আপ্তবাক্য আছে যে, 'even the best can be bettered'। বইটির উৎকর্ষ বৃদ্ধির জন্য শিক্ষক সমাজের ও বিদ্যোৎসাহী ব্যক্তিদের গঠনমূলক মতামত ও সুপরামর্শ সাদরে গৃহীত হবে।

কল্যাণময় গঙ্গোপাধ্যায়

প্রশাসক

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ

ডিসেম্বর, ২০১৭

৭৭/২ পার্ক স্ট্রিট

কলকাতা-৭০০ ০১৬

প্রাক্‌কথন

পশ্চিমবঙ্গের মাননীয়া মুখ্যমন্ত্রী শ্রীমতী মমতা বন্দ্যোপাধ্যায় ২০১১ সালে বিদ্যালয় শিক্ষার ক্ষেত্রে একটি 'বিশেষজ্ঞ কমিটি' গঠন করেন। এই বিশেষজ্ঞ কমিটির ওপর দায়িত্ব ছিল বিদ্যালয় স্তরের সমস্ত পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকের পর্যালোচনা, পুনর্বিবেচনা এবং পুনর্বিন্যাসের প্রক্রিয়া পরিচালনা করা। সেই কমিটির সুপারিশ অনুযায়ী নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তক নির্মিত হয়। ইতোপূর্বে প্রাক্-প্রাথমিক থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত সমস্ত পাঠ্যপুস্তক জাতীয় পাঠক্রমের রূপরেখা ২০০৫ এবং শিক্ষার অধিকার আইন ২০০৯ নথিদুটিকে অনুসরণ করে নির্মিত হয়েছে। এবার নবম শ্রেণির নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি অনুযায়ী পাঠ্যপুস্তকগুলি নির্মিত হলো।

নবম শ্রেণির গণিত বইয়ের নাম 'গণিত প্রকাশ'। বইটিতে ধাপে ধাপে গাণিতিক সমস্যাবলি সমাধানের পদ্ধতি শেখানো হয়েছে। শিক্ষার্থীর সুবিধার জন্য প্রতিটি ক্ষেত্রেই সযত্নে মৌল ধারণাগুলিকে প্রাঞ্জল ভাষায় এবং হাতেকলমে পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা হয়েছে। 'গণিত' বিষয়টিকে বৈচিত্র্যময় এবং আকর্ষণীয় করে তোলার সযত্ন প্রয়াস বইটিতে সহজেই লক্ষ করা যাবে। শিক্ষার্থীর প্রায়োগিক সামর্থ্যবৃদ্ধির দিকেও আমরা তীক্ষ্ণ নজর রেখেছি। আশা করা যায় শিক্ষার্থীমহলে বইটি সমাদৃত হবে।

একথা বলা বিশেষ প্রয়োজন যে, প্রথম শ্রেণি থেকে নবম শ্রেণি পর্যন্ত পরিকল্পিত নতুন পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচি অনুযায়ী নির্মিত পাঠ্যপুস্তকে ধারাবাহিকভাবে গণিতের বিভিন্ন ধারণা (Concept) এবং অনুশীলনীগুলি বিন্যস্ত করা হয়েছে। শিক্ষার্থীরা ক্রমোচ্চশ্রেণিতে উত্তীর্ণ হয়ে এই পাঠ্যপুস্তকগুলি অনুসরণ করলে সহজেই গণিতে পারদর্শিতা অর্জন করবে।

নির্বাচিত শিক্ষাবিদ, শিক্ষিকা-শিক্ষক এবং বিষয়-বিশেষজ্ঞবৃন্দ অল্প সময়ের মধ্যে বইটি প্রস্তুত করেছেন। পশ্চিমবঙ্গের মাধ্যমিক শিক্ষার সারস্বত নিয়ামক পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ পাঠ্যপুস্তকটিকে অনুমোদন করে আমাদের বাধিত করেছেন। বিভিন্ন সময়ে পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ, পশ্চিমবঙ্গ সরকারের শিক্ষা দপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ সর্বশিক্ষা মিশন, পশ্চিমবঙ্গ শিক্ষা অধিকার প্রভৃত সহায়তা প্রদান করেছেন। তাঁদের ধন্যবাদ।

পশ্চিমবঙ্গের মাননীয় শিক্ষামন্ত্রী ড. পার্থ চ্যাটার্জী প্রয়োজনীয় মতামত এবং পরামর্শ দিয়ে আমাদের বাধিত করেছেন। তাঁকে আমাদের কৃতজ্ঞতা জানাই।

বইটির উৎকর্ষ বৃদ্ধির জন্য শিক্ষাপ্রেমী মানুষের মতামত, পরামর্শ আমরা সাদরে গ্রহণ করব।

অভীক মজুমদার
চেয়ারম্যান
'বিশেষজ্ঞ কমিটি'
বিদ্যালয় শিক্ষা দপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ সরকার

ডিসেম্বর, ২০১৭
নিবেদিতা ভবন, ষষ্ঠতল
বিধাননগর, কলকাতা : ৭০০ ০৯১

বিশেষজ্ঞ কমিটি পরিচালিত পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন পর্ষদ

নির্মাণ ও বিন্যাস

অভীক মজুমদার (চেয়ারম্যান, বিশেষজ্ঞ কমিটি)

রথীন্দ্রনাথ দে (সদস্য সচিব, বিশেষজ্ঞ কমিটি)

শংকরনাথ ভট্টাচার্য

তপসুন্দর বন্দ্যোপাধ্যায়

সুমনা সোম

মলয় কৃষ্ণ মজুমদার

পার্থ দাস

পরামর্শ ও সহায়তা

ড. নূরুল ইসলাম

প্রচ্ছদ ও অলংকরণ

শংকর বসাক

মুদ্রণ সহায়তা

বিপ্লব মণ্ডল

পাঠ্যসূচি

1. বাস্তব সংখ্যা :

(i) স্বাভাবিক সংখ্যা, অখণ্ড সংখ্যা, পূর্ণসংখ্যা, মূলদ সংখ্যা, অমূলদ সংখ্যা, বাস্তবসংখ্যা ও বীজগাণিতিক সংখ্যার ধারণা।

(ii) বাস্তব সংখ্যার দশমিকে প্রকাশ।

(iii) বাস্তব সংখ্যাকে সংখ্যারেখায় স্থাপন।

(iv) বাস্তব সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ।

(v) বাস্তব সংখ্যার স্বতঃসিদ্ধগুলির ধারণা এবং স্বতঃসিদ্ধগুলি ব্যবহার করে সহজ বাস্তব সমস্যার সমাধান।

2. সূচকের নিয়মাবলি :

(i) নিধান (ধনাত্মক), সূচক, মূল ও ঘাতের ধারণা।

(ii) পূর্ণসংখ্যা, ভগ্নাংশ সূচকের ধারণা।

(iii) সূচকের মৌলিক নিয়মাবলি ও তাদের প্রয়োগ।

(iv) সূচক সংক্রান্ত সমীকরণ ও অভেদ।

3. লেখচিত্র :

(i) সমকোণী কার্তেজীয় তল ও স্থানাঙ্কের ধারণা।

(ii) বিন্দুর স্থানাঙ্কের ধারণা ও কার্তেজীয় তলে একটি বিন্দু স্থাপনের ধারণা।

(iii) একচল ও দুই চলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের ধারণা এবং তাদের লেখচিত্র অঙ্কন।

(iv) লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক সহসমীকরণের সমাধান। একটিমাত্র সমাধান, অসংখ্য সমাধান ও সমাধান সম্ভব নয় এগুলির ধারণা।

4. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (দূরত্ব নির্ণয়) :

(i) সমকোণী কার্তেজীয় তলে দুটি বিন্দুর দূরত্বের সূত্রের ধারণা ও তার প্রয়োগ।

5. রৈখিক সহসমীকরণ (দুই চলবিশিষ্ট):

(i) রৈখিক সহসমীকরণ সমাধান (অপনয়ন, তুলনামূলক, পরিবর্ত ও বজ্রগুণন পদ্ধতি)।

(ii) রৈখিক সহসমীকরণের বাস্তব সমস্যার সমাধান।

6. সামান্তরিকের ধর্ম :

(i) চতুর্ভুজ, ট্রাপিজিয়াম, সামান্তরিক, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও রম্বসের ধারণা।

(ii) যে-কোনো সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান, বিপরীত কোণদ্বয়ের পরিমাপ সমান এবং প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে — প্রমাণ।

(iii) যে-কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে — প্রমাণ।

(iv) একটি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক — প্রমাণ।

(v) একটি চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ সমান হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক — প্রমাণ।

(vi) একটি চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং ওই বাহুদ্বয় সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক — প্রমাণ।

(vii) একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক — প্রমাণ।

(viii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

7. বহুপদী সংখ্যামালা :

(i) এক বা একের বেশি চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।

(ii) বহুপদী সংখ্যামালার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের ধারণা।

(iii) বহুপদী সংখ্যামালা থেকে অপেক্ষকের ধারণা।

(iv) বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যের ধারণা।

(v) ভাগশেষ উপপাদ্য।

(vi) গুণনীয়ক উপপাদ্য।

(vii) শূন্য বহুপদীর ধারণা।

(viii) উপরের প্রত্যেকটির প্রয়োগ।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ : $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$, $a^3+b^3+c^3-3abc$, মধ্যপদ বিশ্লেষণ, শূন্য পদ্ধতি।

9. ভেদক ও মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য :

(i) একটি ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক — প্রমাণ।

(ii) একটি ত্রিভুজের যে-কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা, তৃতীয় বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং দুটি বাহুদ্বয়ের ছিন্ন সরলরেখাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক—প্রমাণ।

(iii) তিন বা তিনের বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যদি কোনো ভেদক থেকে সমান সমান অংশ ছিন্ন করে তাহলে অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ ছিন্ন করবে। প্রমাণের প্রয়োজন নেই। কেবলমাত্র যাচাই।

(iv) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

10. লাভ ও ক্ষতি : ক্রয়মূল্য, বিক্রয়মূল্য, লাভ, ক্ষতি, ধার্যমূল্য, ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ বা ক্ষতি, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ বা ক্ষতি, ছাড়, সমতুল্য ছাড় ইত্যাদির ধারণা এবং প্রয়োগ।

11. রাশিবিজ্ঞান :

(i) তথ্যের তালিকা নির্ণয়ের ধারণা।

(ii) পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরির ধারণা।

(iii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ধারণা।

(iv) আয়তলেখ অঙ্কন।

(v) পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন।

12. ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য :

স্বতঃসিদ্ধ : আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ -এর ধারণা।

(i) যে সকল সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত তাদের ক্ষেত্রফল সমান — প্রমাণ।

(ii) যে সকল সামান্তরিক সমান সমান ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত তাদের ক্ষেত্রফল সমান (অনুসিদ্ধান্ত)।

(iii) সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিকটির ভূমি × উচ্চতা (অনুসিদ্ধান্ত)।

(iv) একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক — প্রমাণ।

(v) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$× ভূমি × উচ্চতা (অনুসিদ্ধান্ত)।

(vi) যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত তাদের ক্ষেত্রফল সমান — প্রমাণ।

(vii) যে সকল ত্রিভুজ সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত তাদের ক্ষেত্রফল সমান (অনুসিদ্ধান্ত)।

(viii) সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত তারা একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত — প্রমাণ।

(ix) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

13. সম্পাদ্য : একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র অঙ্কন যার একটি কোণের পরিমাপ নির্দিষ্ট এবং প্রয়োগ।

14. সম্পাদ্য : একটি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র অঙ্কন এবং প্রয়োগ।

15. ত্রিভুজ এবং চতুর্ভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

(i) ত্রিভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়। হেরনের সূত্রের ধারণা। বাস্তব সমস্যায় প্রয়োগ।

(ii) আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, সামান্তরিক, রম্বস, ট্রাপিজিয়ামের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং বাস্তব সমস্যায় প্রয়োগ।

16. বৃত্তের পরিধি : বৃত্তের পরিধি নির্ণয়। π -এর ধারণা এবং বৃত্তের পরিধির সূত্রের সাহায্যে বাস্তব সমস্যার সমাধান।

17. সমবিন্দু : সমবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য :

(i) যে-কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু — প্রমাণ। পরিকেন্দ্র, পরিব্যাসার্ধ, পরিবৃত্তের ধারণা।

(ii) যে-কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বগুলি সমবিন্দু — প্রমাণ। লম্ববিন্দু, পাদ-ত্রিভুজ-এর ধারণা।

(iii) যে-কোনো ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু — প্রমাণ। অন্তঃকেন্দ্র, অন্তর্ব্যাস্যার্ধ, অন্তর্বৃত্তের ধারণা।

(iv) যে-কোনো ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি সমবিন্দু — প্রমাণ। ভরকেন্দ্রের ধারণা এবং ভরকেন্দ্র প্রতিটি মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে তার ধারণা।

(v) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

18. বৃত্তের ক্ষেত্রফল : বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্রের ধারণা, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের সূত্রের ধারণা এবং বাস্তব সমস্যার সমাধান।

19. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাংশকে প্রদত্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্রের ধারণা ও তার প্রয়োগ।

20. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি :

(i) তিনটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজাকারক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

(ii) চারটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন চতুর্ভুজাকারক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

(iii) তিনটি প্রদত্ত বিন্দুর সমরেখ হবার শর্ত।

(iv) ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নির্ণয়।

21. লগারিদ্‌ম :

(i) প্রয়োজনীয়তা।

(ii) সংজ্ঞা।

(iii) সাধারণ লগারিদ্‌ম ও স্বাভাবিক লগারিদ্‌মের ধারণা।

(iv) লগারিদ্‌মের ধর্মাবলি।

(v) সাধারণ লগারিদ্‌মের প্রয়োগ।

সংযোজন : (মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

22. সেট তত্ত্বের ধারণা।

23. সম্ভাবনা তত্ত্বের ধারণা।

প্রথম পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

[Summative-I (Chapters 1 to 8)]

বিষয়	অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	মোট নম্বর	অধ্যায়
পাটিগণিত	1 (1×1)	2 (2×1)	3 (3×1)	6	1
বীজগণিত	3 (1×3)	8 (2×4)	9 (3×3)	20	2,3,5,7,8
জ্যামিতি	1 (1×1)	2 (2×1)	7 (4×1 +3×1)	10	6
স্থানাঙ্ক জ্যামিতি	1 (1×1)	-	3 (3×1)	4	4
মোট নম্বর	**6**	**12**	**22**	**40**	
	6 + 12 = 18				

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10 নম্বর

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন-

1. বহুপছন্দ ভিত্তিক প্রশ্ন, 2. সত্য/মিথ্যা, 3. শূন্যস্থান পূরণ এই ধরনের প্রশ্ন থাকবে

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

বীজগণিত

(i) সূচকের নিয়মাবলি / বহুপদী রাশিমালা — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 2 নম্বর

(ii) লেখচিত্র — — — — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 2 নম্বর

(iii) রৈখিক সহ-সমীকরণ — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 2 নম্বর

(iv) উৎপাদকে বিশ্লেষণ — — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 2 নম্বর

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

পাটিগণিত

(i) বাস্তব সংখ্যা — — — — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

বীজগণিত

(i) লেখচিত্র — — — — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

(ii) রৈখিক সহ-সমীকরণ — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

(iii) উৎপাদকে বিশ্লেষণ — — — — — — — — — — — — — — — — 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

জ্যামিতি

2টি উপপাদ্যের মধ্যে 1টি = 4 নম্বর

উপপাদ্যের প্রয়োগে জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

দ্বিতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

[Summative-II (Chapters 4, 5, 6, 9 to 16)]

বিষয়	অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	মোট নম্বর	অধ্যায়
পাটিগণিত	1 (1×1)	2 (2×1)	3 (3×1)	6	10
বীজগণিত	-	-	3 (3×1)	3	5
জ্যামিতি	1 (1×1)	2 (2×1)	11 (4×1 + 3×1 + 4×1)	14	6,9,12,13,14
স্থানাঙ্ক জ্যামিতি	1 (1×1)	2 (2×1)	-	3	4
পরিমিতি	1 (1×1)	2 (2×1)	6 (3×2)	9	15, 16
রাশিবিজ্ঞান	-	2 (2×1)	3 (3×1)	5	11
মোট নম্বর	**4**	**10**	**26**	**40**	
		4 + 10 = 14			

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10 নম্বর

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন-

1. বহুপছন্দ ভিত্তিক প্রশ্ন, 2. সত্য/মিথ্যা, 3. শূন্যস্থান পূরণ এই ধরনের প্রশ্ন থাকবে।

জ্যামিতি

(i) সামান্তরিকের ধর্ম _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 1টি প্রশ্ন = 1 নম্বর

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

পাটিগণিত

(i) লাভ ও ক্ষতি _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

বীজগণিত

(i) রৈখিক সহ-সমীকরণ (অপনয়ন/পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান) _ _ _ _ _ 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

জ্যামিতি

2টি উপপাদ্যের মধ্যে 1টি = 4 নম্বর

উপপাদ্যের প্রয়োগে জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

সম্পাদ্য 1টি প্রশ্ন = 4 নম্বর

পরিমিতি

(i) ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

(ii) বৃত্তের পরিধি _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

রাশিবিজ্ঞান _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 1টি প্রশ্ন = 3 নম্বর

অন্তিম পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

বিষয়	বহু পছন্দ ভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	মোট
পাটিগণিত	2 (1×2)	4 (2×2)	4	10
বীজগণিত	5 (1×5)	8 (2×4)	22	35
জ্যামিতি	2 (1×2)	4 (2×2)	11	17
স্থানাঙ্ক জ্যামিতি	1 (1×1)	2 (2×1)	3	6
পরিমিতি	2 (1×2)	4 (2×2)	6	12
রাশিবিজ্ঞান	2 (1×2)	4 (2×2)	4	10
মোট নম্বর	**14**	**26**	**50**	**90**
	14 + 26 = 40			

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10

** দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

পাটিগণিত

(i) বাস্তব সংখ্যা
(ii) লাভ ও ক্ষতি
} 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 4 নম্বর

বীজগণিত

(i) বহুপদী সংখ্যামালা — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর
(ii) উৎপাদকে বিশ্লেষণ — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর
(iii) লেখচিত্র — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 4 নম্বর
(iv) রৈখিক সহ-সমীকরণ (সমাধান) — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর
(v) রৈখিক সহ-সমীকরণ (বাস্তব সমস্যায় প্রয়োগ) — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর
(vi) সূচকের নিয়মাবলি — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর
(vii) লগারিদ্‌ম — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর

জ্যামিতি

2টি উপপাদ্যের মধ্যে 1টি = 4 নম্বর
উপপাদ্যের প্রয়োগে জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর
সম্পাদ্য (2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর) = 4 নম্বর

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 3 নম্বর

পরিমিতি 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি প্রশ্নের উত্তর = 3 × 2 নম্বর = 6 নম্বর

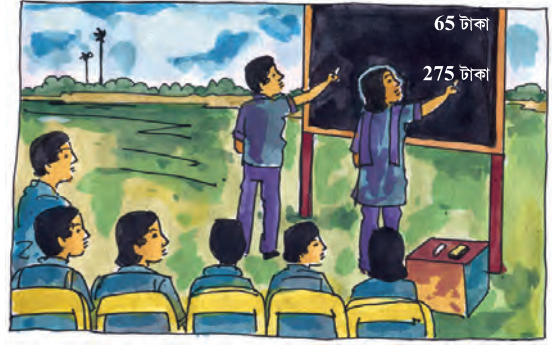
রাশিবিজ্ঞান 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি প্রশ্নের উত্তর = 4 নম্বর

সূ চি প ত্র

অধ্যায়	বিষয়	পৃষ্ঠা

সংযোজন : (মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

1 বাস্তব সংখ্যা (REAL NUMBER)

প্রতিবছরের মতো এবছরেও আমাদের পাড়ার নেতাজি বালক সংঘের মাঠে একটি হস্তশিল্প মেলার আয়োজন হয়েছিল। এই মেলায় আমরা নিজেদের হাতের তৈরি জিনিস বিক্রি করেছি।

আমরা ঠিক করেছি মেলায় নিজেদের তৈরি জিনিস বিক্রি করে যে টাকা পেয়েছি তার বেশির ভাগটাই পাড়ার উন্নতির জন্য ক্লাবকে দান করব।

তাই মেলায় কী কী জিনিস কত কত টাকায় বিক্রি হলো তার তালিকা তৈরি করে ক্লাবের বোর্ডে লিখি।

রঙিন কার্ড বিক্রি করে	65 টাকা	আচার বিক্রি করে	385 টাকা
ছবি বিক্রি করে	275 টাকা	শাড়ি বিক্রি করে	942 টাকা
কাপড়ের ব্যাগ বিক্রি করে	512 টাকা	পাঁপড় বিক্রি করে	135 টাকা

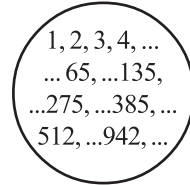
দেখছি, বোর্ডে লেখা তথ্যে অনেকগুলি সংখ্যা লেখা আছে।

এই সংখ্যাগুলি কী ধরনের সংখ্যা জানার চেষ্টা করি।

65, 275, 512, 385, 942, 135 .... সংখ্যাগুলি স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Numbers)। গণনা করা থেকেই সংখ্যার সৃষ্টি হয়েছে। তাই 1, 2, 3, 4, ..., 50, ... এগুলিকে আমরা গণনার সংখ্যা বা স্বাভাবিক সংখ্যা বলি।

স্বাভাবিক সংখ্যাদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা ☐।

আমি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি পাশের বৃত্তাকার ক্ষেত্রে লিখি ও স্বাভাবিক সংখ্যার দল গড়ি।

1, 2, 3, 4, ...
... 65, ...135,
...275, ...385, ...
512, ...942, ...

স্বাভাবিক সংখ্যার দল

স্বাভাবিক সংখ্যার দলকে সাধারণভাবে ইংরাজি বর্ণমালার 'N' অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

মনামী তার ছবি বিক্রি করে 275 টাকা পেয়েছিল। কিন্তু সে সম্পূর্ণ টাকাই অর্থাৎ 275 টাকা পাড়ার উন্নয়নের জন্য ক্লাবকে দান করল।

এখন মনামীর কাছে পড়ে রইল 275 টাকা – 275 টাকা = 0 টাকা

‘0’ কি স্বাভাবিক সংখ্যা?

না, ‘0’ স্বাভাবিক সংখ্যা নয়।

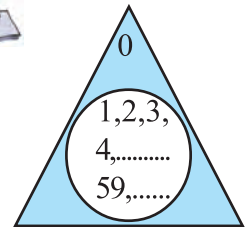
0, 1, 2, 3, ---------- এরা অখণ্ড সংখ্যা (Whole Numbers)

স্বাভাবিক সংখ্যার দলে শূন্য (0) রাখলে অখণ্ড সংখ্যার দল পাব। অর্থাৎ, 0 এবং স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে মিলে অখণ্ড সংখ্যা বলা হয়।

0
1,2,3,
4,.........
59,.....

অখণ্ড সংখ্যার দল

আমি অখণ্ড সংখ্যাগুলি পাশের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে লিখি ও অখণ্ড সংখ্যার দল গড়ি।

অখণ্ড সংখ্যার দলকে সাধারণভাবে ইংরাজি বর্ণমালার ‘W’ অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

1 কার্ড বিক্রি করে ও আচার বিক্রি করে মোট কত টাকা পেয়েছে হিসাব করে লিখি।

কার্ড বিক্রি করে ও আচার বিক্রি করে মোট পেয়েছে, 65 টাকা + 385 টাকা = 450 টাকা

450 একটি ☐ সংখ্যা। অর্থাৎ দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা যোগ করে স্বাভাবিক সংখ্যা পেলাম।

আমি যে কোনো দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা যোগ করে দেখছি,

দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল সর্বদা স্বাভাবিক সংখ্যা। [বিভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যা নিয়ে যোগ করে নিজে যাচাই করি]

2 যে কোনো দুটি অখণ্ড সংখ্যার যোগফল সর্বদা অখণ্ড সংখ্যা হবে। [বিভিন্ন অখণ্ড সংখ্যা নিয়ে যোগ করে নিজে যাচাই করি]

3 আমি যে কোনো দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা বা অখণ্ড সংখ্যা গুণ করি ও কী পাই লিখি। [বিভিন্ন অখণ্ড সংখ্যা নিয়ে গুণ করে নিজে যাচাই করি]

দেখছি, দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল সর্বদা ☐ সংখ্যা। দুটি অখণ্ড সংখ্যার গুণফল অখণ্ড সংখ্যা। [বিভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যা নিয়ে গুণ করে নিজে যাচাই করি]

4 যদি দুটি যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা বিয়োগ করি, বিয়োগফলও স্বাভাবিক সংখ্যা হবে কিনা দেখি।

দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা 65 ও 385 নিলাম,

$65 - 385 = -320$

65 থেকে 385 বিয়োগ করে –320 পেলাম যা স্বাভাবিক সংখ্যা নয়।

অর্থাৎ দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগফল সর্বদা স্বাভাবিক সংখ্যা হয় না।

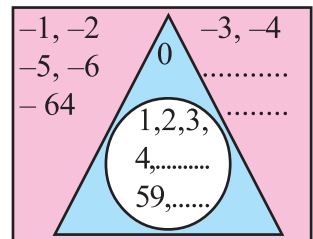
5 –320 কী ধরনের সংখ্যা?

–320 একটি পূর্ণ সংখ্যা।

অখণ্ড সংখ্যা ও –1, –2, –3, ... সংখ্যাগুলি মিলিত হয়ে পূর্ণসংখ্যার (Integers) দল গঠিত হয়। পূর্ণসংখ্যার দলকে সাধারণভাবে ইংরাজি বর্ণমালার 'Z' অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

আমি পূর্ণসংখ্যাগুলি পাশের আয়তাকার ক্ষেত্রে লিখি ও পূর্ণসংখ্যার দল গড়ি।

পূর্ণসংখ্যার দলে দেখছি, কিছু সংখ্যা 0 (শূন্য) অপেক্ষা বড়ো আবার কিছু সংখ্যা 0 (শূন্য) অপেক্ষা ছোটো। এদের কী বলা হয়?

0 অপেক্ষা বড়ো পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ 1, 2, 3, ... এদের **ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (Positive Integers)** এবং 0 অপেক্ষা ছোটো পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ –1, –2, –3, ... এদের **ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (Negative Integers)** বলা হয়।

পূর্ণসংখ্যার দল

কিন্তু 0 (শূন্য) একটি পূর্ণসংখ্যা যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়।

6 আমি যে কোনো দুটি পূর্ণসংখ্যা নিয়ে যোগ, বিয়োগ ও গুণ করে দেখি কী পাই।

-8 ও -5 সংখ্যা দুটির যোগ, বিয়োগ ও গুণ করি।

$(-8) + (-5) = \square$, $(-8) - (-5) = \square$ এবং $(-8) \times (-5) = \square$

দেখছি, (-8) ও (-5) পূর্ণসংখ্যাদুটির যোগফল, বিয়োগফল ও গুণফল পূর্ণসংখ্যা।

7 আমি অন্য যে কোনো দুটি পূর্ণসংখ্যা নিয়ে যোগ, বিয়োগ ও গুণ করে দেখছি পূর্ণসংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল ও গুণফল সর্বদা $\square$। [নিজে যাচাই করে লিখি।]

8 যদি দুটি পূর্ণসংখ্যা ভাগ করি তাহলে কী পাবো দেখি।

$5 \div 7 = \frac{5}{7}$, $9 \div 2 = \frac{9}{2}$

দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল ভগ্নাংশ পেলাম। দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল সবর্দা পূর্ণসংখ্যা নাও হতে পারে।

9 $\frac{5}{7}, \frac{9}{2}$ ...... এই ধরনের সংখ্যাকে কী বলা হয়?

$\frac{5}{7}, \frac{9}{2}$ .... এই ধরনের সংখ্যাকে **মূলদ সংখ্যা (Rational Numbers)** বলা হয়।

যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে p এবং q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, তাদের **মূলদ সংখ্যা [Rational Numbers]** বলা হয়।

কিন্তু $q \neq 0$ কেন? (নিজে বুঝে লিখি)

পূর্ণসংখ্যার দলে $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{6}$ .... ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলি রাখলে মূলদ সংখ্যার দল পাবো।

পাশের পঞ্চভুজাকারক্ষেত্রে আমি সকল মূলদ সংখ্যা লিখি ও মূলদ সংখ্যার দল গড়ি। মূলদ সংখ্যার দলকে সাধারণ ভাবে 'Q' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

মূলদ সংখ্যা দল

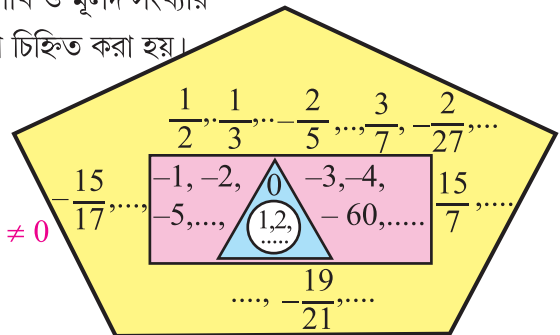
আমি -5 কে লিখতে পারি, $-5 = \frac{-5}{1}$

অর্থাৎ, -5 -কে $\frac{p}{q}$ আকারে লিখতে পারলাম

যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা [$p = -5$ এবং $q = 1$] এবং $q \neq 0$

তাই, (-5) একটি মূলদ সংখ্যা।

সকল পূর্ণসংখ্যাই মূলদ সংখ্যা।

$\frac{2}{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা। আবার, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ ....

10 $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$, ... এদের $\frac{2}{3}$ -এর কী বলা হয়?

$\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$ .... ভগ্নাংশগুলিকে $\frac{2}{3}$-এর **সমতুল্য মূলদ সংখ্যা (Equivalent rational numbers)** বা **সমতুল্য ভগ্নাংশ (Equivalent fractions)** বলা হয়।

> বুঝেছি, $\frac{p}{q}$ -কে মূলদ সংখ্যা বলা হবে যদি p ও q পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $q \neq 0$ হয়। প্রয়োজন মতো $\frac{p}{q}$ লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করি। অর্থাৎ p ও q -এর মধ্যে 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকবে না। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে p ও q -কে **পরস্পর মৌলিক সংখ্যা (Coprime)** হতে হবে।

11 নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর যুক্তি দিয়ে লিখি

(i) সকল মূলদ সংখ্যাই কি পূর্ণসংখ্যা? (ii) প্রতিটি পূর্ণসংখ্যা কি মূলদ সংখ্যা?

(iii) প্রতিটি পূর্ণসংখ্যাই কি অখণ্ড সংখ্যা?

(i) $\frac{1}{2}$ মূলদ সংখ্যা। কিন্তু, $\frac{1}{2}$ পূর্ণসংখ্যা নয়। তাই বলতে পারি যে, সব মূলদ সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা নয়।

(ii) ধরি, n একটি পূর্ণসংখ্যা এবং যেহেতু n কে লেখা যায় $\frac{n}{1}$, তাই n একটি মূলদ সংখ্যা।

(iii) [নিজে লিখি]

আমার বন্ধু রেহানা ঠিক করেছে সকল সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় আঁকার চেষ্টা করবে। তাই আমরা ক্লাবের মাঠে চুন দিয়ে একটি সংখ্যারেখা টানি ও সংখ্যা বসাই।

আমি প্রথমে সংখ্যারেখায় স্বাভাবিক সংখ্যা বসাই।

দেখছি যতই ডানদিকে যাব, ততই বড়ো সংখ্যা পাবো। সবচেয়ে ছোটো স্বাভাবিক সংখ্যা ☐।

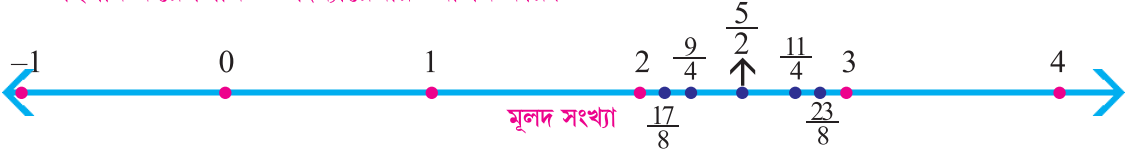
এবার আমি সংখ্যারেখায় অখণ্ড সংখ্যা বসাই।

দেখছি, যতই ডানদিকে যাব ততই বড়ো সংখ্যা পাবো। সবচেয়ে ছোটো অখণ্ড সংখ্যা ☐।

আমি সংখ্যারেখায় পূর্ণসংখ্যা বসাই। সবচেয়ে বড়ো ও সবচেয়ে ছোটো পূর্ণসংখ্যা কী কী তা কি লিখতে পারি?

0-এর ডানদিকে যত যাব ততই বড়ো সংখ্যা পাবো এবং 0-এর বামদিকে যত যাব তত ছোটো সংখ্যা পাবো। সংখ্যারেখায় যে-কোনো পূর্ণসংখ্যার ডানদিকের পূর্ণসংখ্যাগুলি ওই পূর্ণসংখ্যার থেকে বড়ো কিন্তু বামদিকের পূর্ণসংখ্যাগুলি ওই পূর্ণসংখ্যার থেকে ছোটো। যেমন –3 -এর ডানদিকের যে-কোনো পূর্ণসংখ্যা –3 -এর থেকে বড়ো কিন্তু –3 -এর বামদিকের যে-কোনো পূর্ণসংখ্যা –3 -এর থেকে ছোটো।

∴ সবচেয়ে ছোটো পূর্ণসংখ্যা ও সবচেয়ে বড়ো পূর্ণসংখ্যা পাবো না।

12 কিন্তু সংখ্যারেখায় মূলদ সংখ্যা কীভাবে স্থাপন করব? প্রথমে 2 থেকে 3-এর মধ্যে 1 টি মূলদ সংখ্যা হিসাব করে লিখি ও সংখ্যারেখায় স্থাপন করি।

2 ও 3-এর মধ্যমান হলো 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী একটি মূলদ সংখ্যা। 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী সংখ্যা পাওয়ার জন্য 2-এর সঙ্গে 3 যোগ করে 2 দিয়ে ভাগ করব। অর্থাৎ $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$ হলো 1 টি মূলদ সংখ্যা যা 2 ও 3-এর মধ্যে অবস্থিত। $\frac{5}{2}$ মূলদ সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় স্থাপন করলাম।

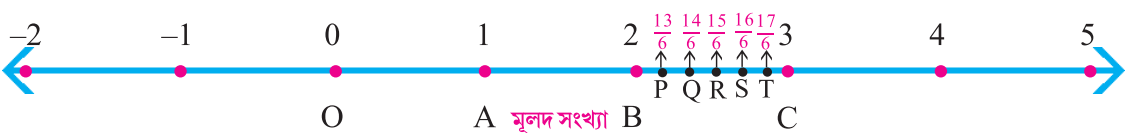
13 আমি সংখ্যা রেখায় 2 ও 3-এর মধ্যে আরও 4 টি মূলদ সংখ্যা লিখি।

2 ও 3-এর মধ্যবর্তী 1টি মূলদ সংখ্যা $\frac{5}{2}$ পেয়েছি।

2 ও $\frac{5}{2}$ -এর মধ্যবর্তী একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{2+\frac{5}{2}}{2}=\frac{9}{4}$	2 ও $\frac{9}{4}$ -এর মধ্যবর্তী একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{2+\frac{9}{4}}{2}=\frac{17}{8}$
$\frac{5}{2}$ ও 3-এর মধ্যবর্তী একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{\frac{5}{2}+3}{2}=\frac{11}{4}$	$\frac{11}{4}$ ও 3-এর মধ্যবর্তী একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{\frac{11}{4}+3}{2}=\square$

14 **অন্যভাবে হিসাব করি:** সংখ্যারেখায় 2 ও 3-এর মধ্যে আছে এমন 5 টি মূলদ সংখ্যা লিখি।

অন্যভাবে পাই, 2 ও 3-এর সমতুল্য মূলদ সংখ্যা লিখি যার হরে 5 + 1 = 6 আছে।
$\therefore\ 2=\frac{2}{1}=\frac{12}{6}$ এবং $3=\frac{3}{1}=\frac{18}{6}$ $\therefore$ 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী 5 টি মূলদ সংখ্যা, $\frac{13}{6},\frac{14}{6},\frac{15}{6},\frac{16}{6},\frac{17}{6}$

15 সংখ্যারেখায় $\frac{13}{6}$, $\frac{14}{6}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{16}{6}$ এবং $\frac{17}{6}$ মূলদ সংখ্যাগুলি স্থাপন করি।

প্রথমে O বিন্দুর ডানদিকে OA = 1 একক নিলাম, $\therefore$ OB = 2 একক এবং OC = 3 একক।
BC-কে সমান 6 ভাগে ভাগ করলাম, BP = $\frac{1}{6}$ একক $\therefore$ OP = OB + BP = $(2+\frac{1}{6})$ একক = $\frac{13}{6}$ একক।

সুতরাং, $\frac{13}{6}$, $\frac{14}{6}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{16}{6}$ এবং $\frac{17}{6}$ মূলদ সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় স্থাপন করে P, Q, R, S ও T বিন্দু পেলাম।

16 সংখ্যারেখায় $\frac{9}{4}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{4}$ এবং $\frac{23}{8}$ মূলদ সংখ্যাগুলি স্থাপন করি।

(i) প্রথমে 2, $\frac{17}{8}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{23}{8}$ ও 3 মূলদ সংখ্যাগুলির সমতুল্য মূলদ সংখ্যা লিখি যার হর 8

$$2=\frac{16}{8}, \frac{17}{8}, \frac{9}{4}=\frac{18}{8}, \frac{5}{2}=\frac{20}{8}, \frac{11}{4}=\frac{22}{8}, \frac{23}{8} \text{ এবং } 3=\frac{24}{8}$$

(ii) এবার O বিন্দুর ডানদিকে OA = 1 একক নিলাম। ∴ OB = 2 একক এবং OC = 3 একক,

BC-কে সমান 8 ভাগে ভাগ করলাম। ধরি, BP = $\frac{1}{8}$ একক ∴ OP=OB + BP = $(2+\frac{1}{8})$ একক = $\frac{17}{8}$ একক

সুতরাং, $\frac{17}{8}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}$ মূলদ সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় স্থাপন করে P, Q, R, S ও T বিন্দু পেলাম।

কী কী পেলাম লিখি ।

(i) ধরি, x ও y দুটি মূলদ সংখ্যা যেখানে $x < y$

∴ $\frac{x+y}{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা যা সংখ্যারেখায় x ও y এর মধ্যে অবস্থিত।

(ii) আবার, x ও y দুটি মূলদ সংখ্যা এবং $x < y$ হলে

সংখ্যারেখায় x ও y-এর মধ্যে n সংখ্যক মূলদ সংখ্যা নীচের মতো করেও নিতে পারি:

$(x + d), (x + 2d), (x + 3d), ..., (x + nd)$ যেখানে $d = \frac{y-x}{n+1}$

সংখ্যারেখায় x ও y-এর মধ্যে n মূলদ সংখ্যা হলো $(x + d), (x + 2d), (x + 3d), ... (x + nd)$. যেহেতু n যত ইচ্ছা বড়ো নেওয়া সম্ভব, তাই যে-কোনো দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে মূলদ সংখ্যার সংখ্যা হবে অসংখ্য।

17 আমি $\frac{1}{7}$ ও $\frac{1}{6}$ -এর মধ্যে একটি মূলদ সংখ্যা লিখি।

$\frac{1}{7}$ ও $\frac{1}{6}$ -এর মধ্যে একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}}{2} = \frac{13}{84}$

18 আমি $\frac{3}{5}$ ও $\frac{4}{5}$ -এর মধ্যে পাঁচটি মূলদ সংখ্যা লিখি।

এখানে, $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ এবং $n = 5$; সুতরাং $d = \frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{5+1} = \frac{\frac{1}{5}}{6} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

সুতরাং, পাঁচটি মূলদ সংখ্যা $(x + d), (x + 2d), (x + 3d), (x + 4d)$ এবং $(x + 5d)$

অর্থাৎ, $(\frac{3}{5}+\frac{1}{30}), (\frac{3}{5}+\frac{2}{30}), (\frac{3}{5}+\frac{3}{30}), (\frac{3}{5}+\frac{4}{30}), (\frac{3}{5}+\frac{5}{30})$

অর্থাৎ, $\frac{19}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{22}{30}, \frac{23}{30}$

∴ পাঁচটি মূলদ সংখ্যা $\frac{19}{30}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{23}{30}$ যেগুলি $\frac{3}{5}$ ও $\frac{4}{5}$ এর মধ্যে থাকবে।

19 আমি 5 ও 6-এর মধ্যে 6 টি মূলদ সংখ্যা লিখি।

5 ও 6-এর মধ্যে 6 টি মূলদ সংখ্যা লিখব।

∴ 5 ও 6-এর সমতুল্য মূলদ সংখ্যা লিখি যার হরে 6 + 1 = 7 আছে।

∴ $5 = \frac{35}{7}$ এবং $6 = \frac{42}{7}$

∴ 5 ও 6-এর মধ্যবর্তী 6 টি মূলদ সংখ্যা, $\frac{36}{7}, \frac{37}{7}, \frac{38}{7}, \frac{39}{7}, \frac{40}{7}$ ও $\frac{41}{7}$

20 আমি 3 ও 4-এর মধ্যে 3 টি মূলদ সংখ্যা হিসাব করে লিখি ও সংখ্যারেখায় বসাই। [নিজে করি]

21 আমি $\frac{1}{3}$ ও $\frac{2}{5}$ -এর মধ্যে 3 টি মূলদ সংখ্যা লিখি ও সংখ্যারেখায় বসাই। [নিজে করি]

22 আমি $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$-এর মধ্যে 3 টি মূলদ সংখ্যা লিখি ও সংখ্যারেখায় বসাই। [নিজে করি]

কষে দেখি— 1.1

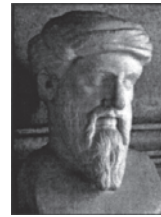
1. মূলদ সংখ্যা কাকে বলে লিখি। 4 টি মূলদ সংখ্যা লিখি।
2. 0 কি একটি মূলদ সংখ্যা ? 0-কে $^p/_q$ [যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ এবং p ও q এর মধ্যে 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক না থাকে] আকারে প্রকাশ করি।
3. নীচের মূলদ সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় স্থাপন করি।
   (i) 7 (ii) –4 (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{9}{2}$ (v) $\frac{2}{9}$ (vi) $\frac{11}{5}$ (vii) $-\frac{13}{4}$
4. নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে মূলদ সংখ্যা দুটির মধ্যে একটি মূলদ সংখ্যা লিখি ও সংখ্যারেখায় বসাই।
   (i) 4 ও 5 (ii) 1 ও 2 (iii) $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$ (iv) -1 ও $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{3}$ (vii) -2 ও -1
5. 4 ও 5 -এর মধ্যে 3 টি মূলদ সংখ্যা লিখি ও সংখ্যারেখায় বসাই।
6. 1 ও 2-এর মধ্যে 6 টি মূলদ সংখ্যা লিখি ও সংখ্যারেখায় বসাই।
7. $\frac{1}{5}$ ও $\frac{1}{4}$ -এর মধ্যে 3 টি মূলদ সংখ্যা লিখি।
8. বক্তব্যটি সত্য হলে (T) ও মিথ্যা হলে (F) পাশে বসাই।
   (i) দুটি পূর্ণসংখ্যা যোগ, বিয়োগ ও গুণ করে পূর্ণসংখ্যা পাই।
   (ii) দুটি পূর্ণসংখ্যা ভাগ করে সর্বদাই পূর্ণসংখ্যা পাই।
9. দুটি মূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ (ভাজক শূন্য নয়) করলে কী সংখ্যা পাবো লিখি।

আমরা সকল মূলদ সংখ্যাকে সংখ্যারেখায় স্থাপন করতে পেরেছি। অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় [যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$] তাদের সকলকে সংখ্যারেখায় স্থাপন করেছি।

কিন্তু বাকি সংখ্যাগুলি অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না [যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$] তাদের কী বলব?

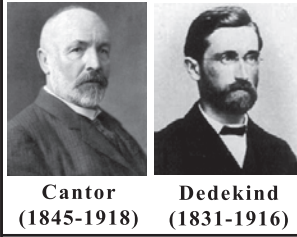
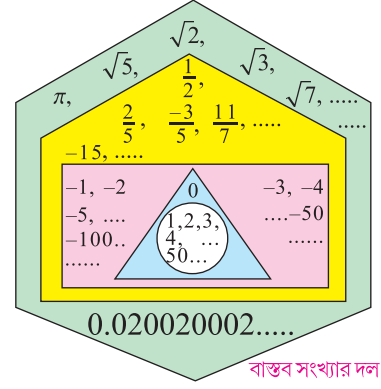
যে সকল সংখ্যাকে $\frac{P}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যাবে না (যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$) তাদের **অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number) বলা হয়।**

যেমন : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ..., 0.10110111011110...

গ্রিসের দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ পিথাগোরাসের অনুগামীরা প্রায় 400 B.C. তে প্রথম অমূলদ সংখ্যার ধারণা দেন। তাঁরা সংখ্যারেখায় মূলদ সংখ্যা ছাড়াও আরও সংখ্যার অস্তিত্ব অনুভব করেন। পরবর্তীকালের বিশিষ্ট গণিতজ্ঞগণ বিভিন্ন অমূলদ সংখ্যার ধারণা দিয়েছেন এবং অমূলদ সংখ্যার সন্ধান এখনও চলেছে।

Pythagoras of Samos
(570 BC–495 BC)

সকল মূলদ সংখ্যার দল ও সকল অমূলদ সংখ্যার দল মিলে বাস্তব সংখ্যার দল পাবো। বাস্তব সংখ্যার দলকে সাধারণভাবে ইংরেজি বর্ণমালার 'R' অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

বুঝেছি, সকল মূলদ সংখ্যা ও সকল অমূলদ সংখ্যা মিলে বাস্তব সংখ্যা। তাই যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হয় মূলদ সংখ্যা নতুবা অমূলদ সংখ্যা।

Cantor
(1845-1918)

Dedekind
(1831-1916)

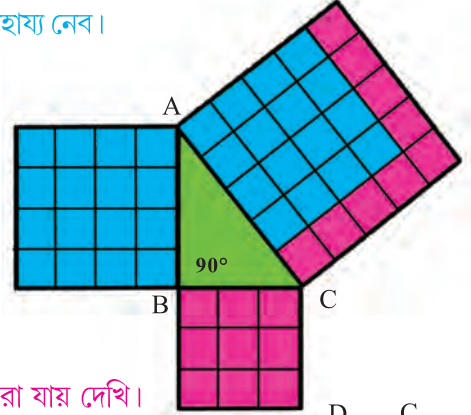
প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার জন্যই কি সংখ্যারেখায় একটি বিন্দু পাব?

প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার জন্যই সংখ্যারেখায় একটি নির্দিষ্ট বিন্দু পাব আবার সংখ্যারেখায় প্রতিটি বিন্দুর জন্য একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা পাব। তাই সংখ্যারেখাকে বাস্তব সংখ্যারেখা বলা হয়।

1870 সালে দুই জার্মান গণিতজ্ঞ ক্যান্টর ও ডেডিকাইন্ড (Cantor ও Dedekind) এই বক্তব্যটিকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে গ্রহণ করেছিলেন।

সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যা কীভাবে স্থাপন করা যায় দেখি। সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যা স্থাপনের জন্য আমরা জ্যামিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করব এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেব।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)

যেকোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, অতিভুজ^2 = লম্ব^2 + ভূমি^{2} অর্থাৎ যেকোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $\because \angle ABC = 90^\circ$

 23 অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}$ -কে সংখ্যারেখায় কীভাবে স্থাপন করা যায় দেখি।

ইমন তার খাতায় একটি বর্গাকার চিত্র ABCD এঁকেছে যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 সেমি.।

D C
A B
1সেমি.

$\therefore$ AB = BC = 1 সেমি.

$\therefore$ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ সেমি. $= \sqrt{1^2 + 1^2}$ সেমি. $= \sqrt{2}$ সেমি.

$\therefore$ AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $\sqrt{2}$ সেমি.

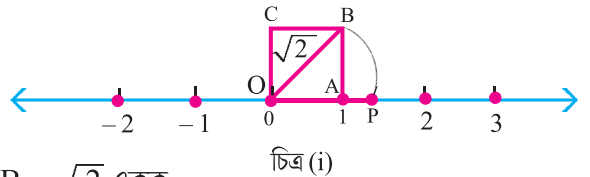
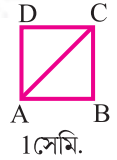
(i) ধরি, O বিন্দুটি শূন্য নির্দেশ করেছে।

OA = 1একক

OABC একটি বর্গাকার চিত্র তৈরি করলাম। OB = $\sqrt{2}$ একক

চিত্র (i)

(ii) O বিন্দুতে কাঁটা কম্পাসের কাঁটা বসিয়ে OB ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করলাম যা সংখ্যারেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করল। OP = $\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যাকে সংখ্যারেখায় স্থাপন করে P বিন্দু পেলাম।

24 অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{3}$ -কে সংখ্যারেখায় কীভাবে স্থাপন করা যায় দেখি।

রেহানা চিত্র (i) -এর OB-এর উপরে BD লম্ব অঙ্কন করে BD = 1 একক নিল। O,D যুক্ত করল।

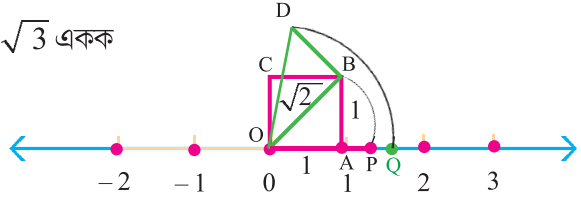
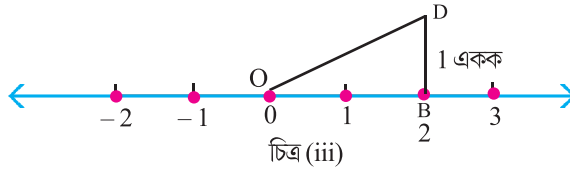
পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই

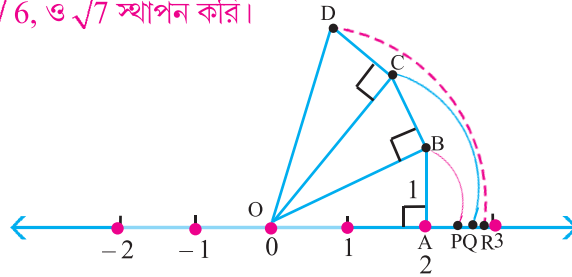
$OD = \sqrt{OB^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$ একক $= \sqrt{3}$ একক

চিত্র (ii)

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OD-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করলাম যা সংখ্যারেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore OQ = \sqrt{3}$ একক।

$\therefore$ $\sqrt{3}$-কে সংখ্যারেখায় স্থাপন করে Q বিন্দু পেলাম।

25 আমি সংখ্যারেখায় OB = 2 এককের-এর উপর BD লম্ব এঁকে BD = 1একক নিলাম। OD -এর সমান দৈর্ঘ্যের মাপ নিয়ে $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা সংখ্যারেখায় স্থাপন করি ও কোন বিন্দু পাই দেখি।

চিত্র (iii)

26 আমি সংখ্যারেখায় $\sqrt{5}, \sqrt{6}$, ও $\sqrt{7}$ স্থাপন করি।

চিত্র (iii)

(i) প্রথমে সংখ্যারেখার O বিন্দুতে শূন্য স্থাপন করলাম। সংখ্যারেখার উপর এমনভাবে A বিন্দু নিলাম যাতে OA = 2 একক হয়।

A বিন্দুতে $OA \perp AB$ আঁকলাম এবং AB = 1 একক নিলাম।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম $OB = \sqrt{2^2 + 1^2}$ একক $= \sqrt{5}$ একক

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB- এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করলাম যা সংখ্যারেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করল, $\therefore OP = \sqrt{5}$ একক

$\sqrt{5}$ সংখ্যারেখায় স্থাপন করে P বিন্দু পেলাম।

(ii) এবার OB-এর উপর BC লম্ব টানলাম এবং BC = 1 একক নিলাম।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম,

$OC^2 = OB^2 + BC^2 = \{(\sqrt{5})^2 + (1)^2\}$ বর্গএকক $= (5 + 1)$ বর্গএকক $= 6$ বর্গএকক

$\therefore OC = \sqrt{6}$ একক

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OC- এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করলাম যা সংখ্যারেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করল। $\therefore OQ = \sqrt{6}$ একক

$\therefore$ সংখ্যারেখায় $\sqrt{6}$ অমূলদ সংখ্যাটি স্থাপন করে Q বিন্দু পেলাম।

27 একইভাবে $\sqrt{7}$ অমূলদ সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় স্থাপন করে R বিন্দু পেলাম।[নিজে করি]

পেলাম, যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m-এর জন্য $\sqrt{m-1}$ সংখ্যারেখায় স্থাপন করতে পারলে $\sqrt{m}$ ও সংখ্যারেখায় স্থাপন করতে পারব।

দুটি মূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ ☐ সংখ্যা (ভাগের সময় ভাজক শূন্য না হলে)।

28 কিন্তু দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ কি অমূলদ সংখ্যা হবে? দুটি অমূলদ সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করে দেখি।

$\sqrt{5}$ ও $(-\sqrt{5})$ যোগ করে পাই, $\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=0$; 0 মূলদ সংখ্যা ।

$\therefore$ দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল সর্বদা অমূলদ সংখ্যা হবে না।

আবার $\sqrt{7}-\sqrt{7}=0$

দুটি অমূলদ সংখ্যার বিয়োগফল সর্বদা অমূলদ সংখ্যা হবে না।

29 আমি যদি $\sqrt{5}$ এর সাথে $\sqrt{5}$ গুণ করি তাহলে কী পাই দেখি।

$\sqrt{5}\times\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2=5$ [$\because$ 5-এর বর্গমূল $\sqrt{5}$]

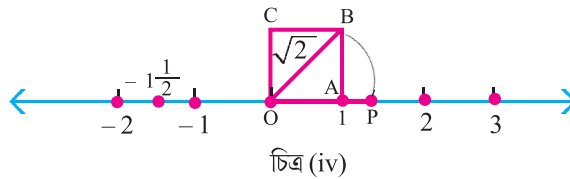
পেলাম, দুটি অমূলদ সংখ্যার গুণফল সর্বদা অমূলদ সংখ্যা হবে না।

আমি দুটি অমূলদ সংখ্যা ভাগ করে দেখছি ভাগফলটি সর্বদা অমূলদ সংখ্যা হচ্ছে না। (নিজে করি)

পেলাম, দুটি অমূলদ সংখ্যার ভাগফল সর্বদা অমূলদ সংখ্যা হবে না।

মন্তব্য: $\sqrt{9}=3$ যদিও $3^2=9$ এবং $(-3)^2=9$
এবং $\sqrt{16}=4$ যদিও $4^2=16$ এবং $(-4)^2=16$, বর্গমূলের "$\sqrt{\ }$" চিহ্ন সংখ্যার ধনাত্মক বর্গমূল বোঝাতে ব্যবহার করা হয়।

সংখ্যারেখায় বাস্তব সংখ্যাদের বসানোর ফলে কোনো বাস্তব সংখ্যা অন্য কোনো বাস্তব সংখ্যার চেয়ে ছোটো না বড়ো তা বুঝতে আমাদের সুবিধা হয়েছে।

চিত্র (iv)

আমরা বুঝেছি $\sqrt{2}<2$, $-1\frac{1}{2}<-1$ ইত্যাদি।

বাস্তব সংখ্যা '=' ও '<' এর সাপেক্ষে কয়েকটি খুব প্রয়োজনীয় নিয়ম মেনে চলে। আমরা নিয়মগুলি বুঝতে চেষ্টা করি।

1. যদি a ও b যেকোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে $a<b$, $b<a$, $a=b$ -এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি শর্ত অবশ্যই মানবে। যেমন যদি $a=1$ এবং $b=1.4$ হয় , তবে এক্ষেত্রে $a<b$ হবে।

2. i) $a=b, b=c \Rightarrow a=c$

   ii) $a<b, b<c \Rightarrow a<c$ (যেমন $3<5$ ও $5<11 \Rightarrow 3<11$)

   a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা ।

3. (i) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
   (ii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (যেমন $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$)
   a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা ।
4. (i) $a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$
   (ii) $a < b$ এবং $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$

   (যেমন $3 < 5 \Rightarrow 3 \times 4 < 5 \times 4$ কিন্তু $3 < 5 \Rightarrow 3\times(-4) > 5\times(-4)$

   a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা।

উপরের নিয়মগুলিও বাস্তবসংখ্যার ক্রম সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধ।

স্বতঃসিদ্ধগুলির সাহায্যে বাস্তবসংখ্যার অনেক উপপাদ্য প্রমাণ করা যায় যেমন —

(i) $-(a+b) = -a - b$. (ii) $a. 0 = 0$ ইত্যাদি। আমরা বাস্তব সংখ্যার অঙ্ক করার সময় নিয়মগুলি ব্যবহার করি।

কষে দেখি— 1.2

1. নীচের বক্তব্যের কোনটি সত্য ও কোনটি মিথ্যা লিখি:

(i) দুটি মূলদ সংখ্যার সমষ্টি সর্বদা মূলদ সংখ্যা হবে।
(ii) দুটি অমূলদ সংখ্যার সমষ্টি সর্বদা অমূলদ সংখ্যা হবে।
(iii) দুটি মূলদ সংখ্যার গুণফল সর্বদা মূলদ সংখ্যা হবে।
(iv) দুটি অমূলদ সংখ্যার গুণফল সর্বদা মূলদ সংখ্যা হবে।
(v) প্রতিটি মূলদ সংখ্যাই বাস্তব সংখ্যা।
(vi) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যাই অমূলদ সংখ্যা।

2. অমূলদ সংখ্যা বলতে কী বুঝি? 4 টি অমূলদ সংখ্যা লিখি।

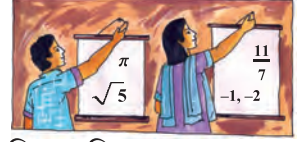
3. নীচের সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনটি মূলদ সংখ্যা এবং কোনটি অমূলদ সংখ্যা লিখি :

(i) $\sqrt{9}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) $\sqrt{7}$ (iv) $\sqrt{50}$ (v) $\sqrt{100}$
(vi) $-\sqrt{81}$ (vii) $\sqrt{42}$ (viii) $\sqrt{29}$ (ix) $-\sqrt{1000}$

4. সংখ্যারেখায় $\sqrt{5}$ স্থাপন করি।

5. সংখ্যারেখায় $\sqrt{3}$ স্থাপন করি।

6. একই সংখ্যারেখায় $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, -\sqrt{6}, -\sqrt{8}, -\sqrt{11}$ স্থাপন করি।

মূলদ সংখ্যাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ আমরা আগেই শিখেছি। এখন আমরা কিছু অমূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে শিখব। যেমন $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}\times\sqrt{7}=\sqrt{35}$, $2\sqrt{7}\div\sqrt{7}=2$ ইত্যাদি। আমরা বীজগণিতে শিখছি a + a = 2a, 3b – b = 2b, a×b=ab ইত্যাদি। এগুলির সাহায্যে বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন প্রক্রিয়া বুঝি। কয়েকটি অমূলদ সংখ্যা একটি কাগজে ও কয়েকটি মূলদ সংখ্যা আর একটি কাগজে লিখে দেয়ালে টাঙাই। এরপর এদের থেকে দুটি করে সংখ্যা নিয়ে যোগ, বিয়োগ গুণ ও ভাগ করি।

যেকোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করে একটি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় (যদি ভাগের সময় ভাজক শূন্য না হয়)।

30 আমি যে-কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ (ভাজক শূন্য নয়) করে কী পাই দেখি।

যে কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা $\sqrt{2}$ ও $2\sqrt{2}$ নিলাম। $\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$,
$\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=2\times(\sqrt{2})^2=2\times 2=4$ $\therefore$ $\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$, $\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$
অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যা পেলাম।

31 অন্য যে-কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা নিয়ে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করে (যদি ভাগের সময় ভাজক শূন্য না হয়) সর্বদা বাস্তব সংখ্যা পাবো। [নিজে করি]

32 আমরা যে-কোনো তিনটি বাস্তব সংখ্যা a, b ও c নিয়ে বাস্তব সংখ্যার প্রধান নিয়মগুলি নিজে যাচাই করি ও দেখি ওদের ব্যবহার করে আমরা কী কী সুবিধা পেতে পারি।

(i) (a + b) + c = a + (b + c) [যোগের সংযোগ নিয়ম] (ii) a + b = b + a [যোগের বিনিময় নিয়ম]
(iii) (a ×b) × c = a × (b × c) [গুণের সংযোগ নিয়ম] (iv) a × b = b × a [গুণের বিনিময় নিয়ম]
(v) a (b + c) = ab + ac এবং (a + b) c = ac + bc [বিচ্ছেদ নিয়ম]
(vi) a + 0 = a এবং 0 + a = a [0-কে যোগের একসম উপাদান (additive identity element) বলে]
(vii) a × 1 = a এবং 1×a = a [1-কে গুণের একসম উপাদান (multiplicative identity element বলে]
(viii) a+(–a)=0 এবং (–a)+a=0 [–a কে যোগের সাপেক্ষে a এর বিপরীত উপাদান (inverse element) বলা হয়]
(ix) $a\times\frac{1}{a}$ = 1 এবং $\frac{1}{a}\times a$ = 1(যদি $a\neq 0$ হয়) [$\frac{1}{a}$ কে গুণের সাপেক্ষে a-এর বিপরীত উপাদান (inverse element) বলা হয়।]

এই নিয়মগুলিকে বাস্তব সংখ্যার স্বতঃসিদ্ধ বলা হয়।

নিয়মগুলি নিজে নিজে যাচাই করি। সরল করার সময় নিয়মগুলির ব্যবহার লক্ষ করি:

33 সরল করি: **(i)** $-7\sqrt{2}+7(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ **(ii)** $-22\sqrt{3}+11(1+2\sqrt{3})$

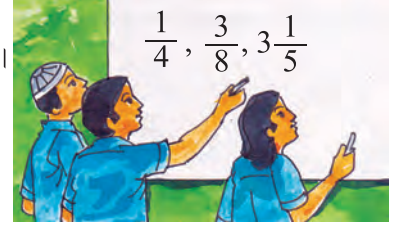
(i) $-7\sqrt{2}+7(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$= -7\sqrt{2}+(7\sqrt{3}+7\sqrt{2})$ [$\because$ a (b + c) = ab + ac]
$= -7\sqrt{2}+(7\sqrt{2}+7\sqrt{3})$ [$\because$ a + b = b + a]
$= (-7\sqrt{2}+7\sqrt{2})+7\sqrt{3}$ [$\because$ a + (b + c) = (a + b) + c]
$= 0+7\sqrt{3}$ [$\because$ – a + a = 0]
$= 7\sqrt{3}$ [$\because$ 0 + a = a]

(ii) [নিজে করি] (প্রতি ধাপে বাস্তব সংখ্যার নিয়মগুলির ব্যবহার উল্লেখ করি)।

আমরা পাঁচবন্ধুরা যখন বাস্তব সংখ্যার দল গড়ে বাস্তব সংখ্যার নানান ধর্ম যাচাই করছি, আমাদের 3 জন বন্ধু অন্য একটি সাদা বোর্ডে বাস্তব সংখ্যাকে অন্যভাবে প্রকাশ করছে।

তারা বোর্ডে $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ ও $3\frac{1}{5}$ -কে দশমিকে প্রকাশ করার চেষ্টা করছে।

আমিও $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ ও $3\frac{1}{5}$ -কে দশমিকে প্রকাশ করি।

$\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{3}{8} = 0.375$ এবং $3\frac{1}{5} = 3.2$

আমরা বোর্ডে আরও কিছু সামান্য ভগ্নাংশ লিখলাম যাদের হরে মৌলিক উৎপাদক কেবলমাত্র 2 এবং 5 আছে।

লিখলাম $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{4}, \frac{8}{25}, \frac{13}{20}$

34 আমি $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{4}, \frac{8}{25}, \frac{13}{20}$ বাস্তব সংখ্যাগুলির দশমিকে বিস্তার করি। [নিজে করি]

> $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{4}, \frac{8}{25}$ এবং $\frac{13}{20}$ এই বাস্তব সংখ্যাগুলি দশমিকে বিস্তার করার সময় দেখছি ভাগফল একটি দশমিক সংখ্যা হচ্ছে এবং ভাগশেষ শূন্য হচ্ছে যদি হরের মৌলিক উৎপাদকে কেবলমাত্র 2 এবং 5 থাকে।

35 আমি অন্য যে কোনো $\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যা নিলাম যেখানে q-এর মৌলিক উৎপাদকে কেবলমাত্র 2 এবং 5 আছে এবং $\frac{p}{q}$ -কে দশমিকে বিস্তার করে দেখছি ভাগফল একটি দশমিক সংখ্যা হচ্ছে ও ভাগশেষ শূন্য হচ্ছে। [নিজে যাচাই করি]

কিন্তু এইরকম দশমিক সংখ্যাকে কী বলব?

এদের সসীম দশমিক সংখ্যা বলা হয়।

$\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলে সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো যদি q-এর মৌলিক উৎপাদকে কেবলমাত্র 2 এবং 5 থাকে।

যদি $\frac{p}{q}$ আকারে মূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করি যেখানে q-এর মৌলিক উৎপাদকে কেবলমাত্র 2 এবং 5 থাকবে না, তবে কী পাই দেখি।

36 আমি $\frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{16}{7}$ বাস্তব সংখ্যাগুলি দশমিকে প্রকাশ করি ও কী পাই দেখি।

$\frac{5}{3} \rightarrow$
```
     1.66....
 3 | 5
   | -3
     20
    -18
      20
     -18
        2...
```

$\frac{17}{6} \rightarrow$
```
     2.833....
 6 | 17
   | -12
      50
     -48
       20
      -18
        20
       -18
         2...
```

$\frac{16}{7} \rightarrow$

```
      2.2857142....
   7 | 16
     |-14
       20
      -14
        60
      - 56
         40
       - 35
          50
         -49
           10
         -  7
            30
           -28
             20
           - 14
              6....
```

∴ পেলাম,

$\frac{5}{3} = 1.66.... = 1.\dot{6}$ [ভাগশেষ 2, 2, 2....., ভাজক 3]

$\frac{17}{6} = 2.833..... = 2.8\dot{3}$ [ভাগশেষ 5, 2, 2,....., ভাজক 6]

$\frac{16}{7} = 2.2857142857142.....$

$= 2.\dot{2}8571\dot{4}$

দেখছি, প্রতিটি ভাগ মিলছে না অর্থাৎ ভাগশেষে 0 আসছে না। অর্থাৎ দশমিকে বিস্তার করায় প্রতিটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা পাচ্ছি।

আমি অন্য যেকোনো $\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলাম [যেখানে q-এর মৌলিক উৎপাদক কেবলমাত্র 2 এবং 5 নয়] এবং আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা পেলাম। [নিজে করি]

প্রতিটি মূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলে হয় সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো নতুবা আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা পাব।

37 নীচের মূলদ সংখ্যাগুলি (ভাগ না করে) দশমিকে বিস্তার করলে সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো কিনা লিখি।

(i) $\frac{7}{16}$ (ii) $\frac{9}{125}$ (iii) $\frac{15}{56}$ (iv) $\frac{19}{80}$ (v) $\frac{3}{24}$

(i) $\frac{7}{16}$ -এর হর 16

এবং $16 = 2^4$

∴ 16 -এর 2 ছাড়া কোনো মৌলিক উৎপাদক নেই।

∴ $\frac{7}{16}$ কে দশমিকে প্রকাশ করলে একটি সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো।

(ii) একইভাবে $\frac{9}{125}$ -এর দশমিকে প্রকাশ একটি সসীম দশমিক সংখ্যা [নিজে করি]

(iii) $\frac{15}{56}$-এর হর 56 এবং $56 = 7 \times 2^3$

∴ 56 -এর মৌলিক উৎপাদকে 2 ছাড়াও অপর একটি মৌলিক উৎপাদক 7 আছে।

∴ $\frac{15}{56}$ -এর দশমিকে প্রকাশ একটি সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো না। আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা পাবো।

আমি একইভাবে (iv) ও (v) [নিজে করি]

38 আমি নীচের মূলদ সংখ্যাগুলি দশমিকে বিস্তার করি এবং কোনটি সসীম দশমিক সংখ্যা এবং কোনটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা লিখি।

(i) $\frac{3}{11}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{7}{24}$ (iv) $\frac{17}{125}$

(i) $\dfrac{3}{11} \rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 11 & \overline{30}\ \ .2727\ldots \\ & -22 \\ \hline & \ \ 80 \\ & -77 \\ \hline & \ \ \ 30 \\ & -22 \\ \hline & \ \ \ 80 \\ & -77 \\ \hline & \ \ \ \ 3\ldots \end{array}$$

$\therefore \dfrac{3}{11} = 0.\dot{2}\dot{7}$

$\therefore \dfrac{3}{11}$ এর দশমিকে প্রকাশ একটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা

(ii) $\dfrac{5}{8} \rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 8 & \overline{50}\ \ .625 \\ & -48 \\ \hline & \ \ 20 \\ & -16 \\ \hline & \ \ \ 40 \\ & -40 \\ \hline & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\therefore \dfrac{5}{8} = 0.625$

$\therefore \dfrac{5}{8}$ এর দশমিকে প্রকাশ একটি সসীম দশমিক সংখ্যা

আমি একইভাবে (iii) ও (iv) নং দুটি নিজে করি।

ইমন ও তিয়াসা বোর্ডে অনেকগুলি সসীম দশমিক সংখ্যা ও আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা লিখছে। তারা লিখেছে 5.875, $2.\dot{6}$, $0.\dot{4}\dot{5}$ এবং $1.\dot{2}8571\dot{4}$

39 কিন্তু প্রতিটি সসীম দশমিক সংখ্যা ও প্রতিটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাই কি মূলদ সংখ্যা? আমি উপরের সংখ্যাগুলিকে মূলদ সংখ্যায় অর্থাৎ $\dfrac{p}{q}$ আকারে [যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$] প্রকাশ করার চেষ্টা করি।

$5.875 = \dfrac{5875}{1000} = \dfrac{47}{8}$

$2.\dot{6} = 2 + .\dot{6} = 2 + \dfrac{6}{9} = 2\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$ [অন্যভাবে $2.\dot{6} = \dfrac{26-2}{9} = \dfrac{8}{3}$]

$0.\dot{4}\dot{5} = \dfrac{45}{99} = \dfrac{5}{11}$

$1.\dot{2}8571\dot{4} = \dfrac{1285714-1}{999999} = \dfrac{1285713}{999999} = \dfrac{9 \times \cancel{142857}}{7 \times \cancel{142857}} = \dfrac{9}{7}$

দেখছি, বোর্ডে লেখা প্রতিটি সসীম ও আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা মূলদ সংখ্যা।

40 আমি $\dfrac{47}{8}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{11},$ এবং $\dfrac{9}{7}$ মূলদ সংখ্যাগুলি দশমিক সংখ্যায় প্রকাশ করি ও কী পাই দেখি। [নিজে করি]

41 আমি 0.5 এবং $0.4\dot{9}$ -এর মধ্যে সম্পর্ক কী আছে হিসাব করে দেখি। [নিজে করি]

আমি অন্য যেকোনো সসীম দশমিক সংখ্যা এবং আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা নিয়ে একইভাবে দেখছি প্রতিটি সসীম দশমিক সংখ্যা এবং আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা মূলদ সংখ্যা।

পেলাম, মূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলে সসীম দশমিক সংখ্যা বা আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা পাবো এবং একটি ভগ্নাংশ সংখ্যার দশমিকে বিস্তার সসীম দশমিক সংখ্যা বা আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা হলে সংখ্যাটি মূলদ সংখ্যা হবে।

42 মূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলে কী পাবো দেখেছি। কিন্তু অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলে কী পাবো দেখি?

অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে বিস্তার করলে অসীম অনাবৃত্ত দশমিক সংখ্যা পাবো (non-terminating and non-recurring) এবং যে সংখ্যার দশমিকের বিস্তার অসীম অনাবৃত্ত দশমিক সংখ্যা, সেই সংখ্যা অমূলদ সংখ্যা।

যেমন, 0.10110111011110... একটি অমূলদ সংখ্যা কারণ এটি অসীম ও অনাবৃত্ত [আবৃত্ত নয়]

আমি অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}$ ও $\sqrt{11}$-এর দশমিকে বিস্তার লিখি (ভাগ পদ্ধতির সাহায্যে)

$\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$ এই ধরনের অমূলদ সংখ্যাগুলি যথাক্রমে $x^2–2=0$, $x^2–11=0$ এই ধরনের সমীকরণগুলির একটি করে বীজ। এই ধরনের পূর্ণসংখ্যার সহগযুক্ত বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণের বীজদের বীজগাণিতিক বা বীজীয় অমূলদ সংখ্যা বলে। এই ধরনের কিছু কিছু অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ ভাগ পদ্ধতিতে করলাম। π, e ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যারা ওপরের মতো পূর্ণসংখ্যার সহগযুক্ত বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণের বীজ নয়। এই ধরনের সংখ্যাদের অবীজীয় বা তুরীয় অমূলদ সংখ্যা বলে। এদের দশমিকে প্রকাশ করা কঠিন। পরে এদের দশমিকে প্রকাশ করার নিয়ম শিখব। কিন্তু সব অমূলদ সংখ্যার দশমিকে প্রকাশ অসীম ও অনাবৃত্ত।

43 আমি $\frac{1}{3}$ ও $\frac{2}{3}$ -এর মধ্যে সংখ্যারেখায় আছে একটি অমূলদ সংখ্যা লিখি।

$\frac{1}{3} = 0.333 \ldots = 0.\dot{3}$ এবং $\frac{2}{3} = 0.666 \ldots = 0.\dot{6}$

$\frac{1}{3}$ ও $\frac{2}{3}$ -এর মধ্যবর্তী অমূলদ সংখ্যা এমন একটি সংখ্যা হবে যা অসীম ও অনাবৃত্ত (non-terminating and non-recurring)

$\therefore \frac{1}{3}$ ও $\frac{2}{3}$ -এ মধ্যবর্তী একটি অমূলদ সংখ্যা 0.45045004500045......

44 আমি 0.23233 2333 233332... এবং 0.25255 2555 255552.... সংখ্যাদুটির মধ্যে দুটি মূলদ সংখ্যা লিখি।

ধরি a = 0.23 233 23332 33332... এবং b = 0.25 2552555 255552...

a এবং b সংখ্যা দুটি অসীম ও অনাবৃত্ত দশমিক সংখ্যা।

দশমিকের পরে a এবং b এর প্রথম দশমিক স্থানে একটি সংখ্যা 2 আছে কিন্তু দ্বিতীয় দশমিক স্থানে a সংখ্যার ক্ষেত্রে 3 এবং b সংখ্যার ক্ষেত্রে 5 আছে। সুতরাং $a < b$

ধরি c = 0.25 এবং d = 0.2525

এক্ষেত্রে c এবং d মূলদ সংখ্যা। সুতরাং এক্ষেত্রে a ও b এর মধ্যে অবস্থিত দুটি মূলদ সংখ্যা হলো 0.25 এবং 0.2525

সকল বাস্তব সংখ্যার দশমিকে বিস্তার সম্ভব।

কিন্তু বাস্তব সংখ্যার দশমিকে বিস্তার কি সংখ্যারেখায় বাস্তব সংখ্যাকে স্থাপনে সাহায্য করবে। দশমিকে বিস্তার করে সংখ্যারেখায় বাস্তব সংখ্যা স্থাপন করে দেখি।

তীর্থ বোর্ডে লিখেছে, 3.256, 4.339, 2.401 ও 5.078

45 আমি সংখ্যারেখায় 3.256 বাস্তব সংখ্যাটি স্থাপন করি।

(i) 3.256 বাস্তব সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় 3 ও 4-এর মধ্যে আছে, তাই 3 ও 4-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে 10টি সমান ভাগে ভাগ করলাম ও দাগ দিলাম।

3-এর পরে প্রথম দাগে 3.1, তারপরে পর পর দাগে 3.2, 3.3 ... 3.9 পর্যন্ত লিখলাম।

(ii) 3.256 যেহেতু 3.2 ও 3.3-এর মধ্যে আছে , তাই 3.2 ও 3.3-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে 10টি সমান ভাগে ভাগ করলাম ও দাগ দিলাম। 3.2-এর পরে প্রথম দাগে 3.21 এবং তারপরে পর পর 3.22, 3.23, 3.24 .... 3.29 পর্যন্ত লিখলাম।

(iii) 3.256 যেহেতু 3.25 ও 3.26-এর মধ্যে আছে, তাই 3.25 ও 3.26-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে আবার 10টি সমান দূরত্বে ভাগ করলাম এবং 3.25-এর পরে পরপর 3.251, 3.252, 3.253, 3.254 ও 3.255 ...... লিখলাম এবং 3.256-এ চিহ্নিত করে P বিন্দু পেলাম।

∴ সংখ্যারেখায় 3.256 বাস্তব সংখ্যাটি স্থাপন করে P বিন্দু পেলাম।

এই পদ্ধতিতে সংখ্যারেখায় কোনো বাস্তব সংখ্যাকে স্থাপন করাকে কী বলা হয়?

এইভাবে আতস কাঁচের (Magnifying glass) মাধ্যমে দুটি সংখ্যার মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে সমান ভাবে ভাগ করে যে কোনো বাস্তব সংখ্যার অবস্থান নির্দেশ করাকে পর্যায়ক্রমিক বিবর্ধক পদ্ধতি (Process of successive magnification) বলা হয়।

46 আমি এই পদ্ধতিতে 4.339, 2.401 এবং 5.078 সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় স্থাপন করি ও কোন বিন্দু পাই দেখি। [নিজে করি]

তিতলি বোর্ডে অনেক আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা লিখেছে। সে লিখেছে $2.6\dot{7}$, $5.3\dot{7}$, $4.7\dot{5}$

কিন্তু আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা কীভাবে সংখ্যারেখায় স্থাপন করব?

উপরের মতো আতস কাঁচের সাহায্যে ঠিকমতো অন্তরটি বেছে নিয়ে পরপর অন্তর্বর্তী সরলরেখাংশকে সমান 10টি ভাগে ভাগ করে আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় প্রতিস্থাপন করতে পারি।

আমি $2.6\dot{7}$ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় স্থাপন করি।

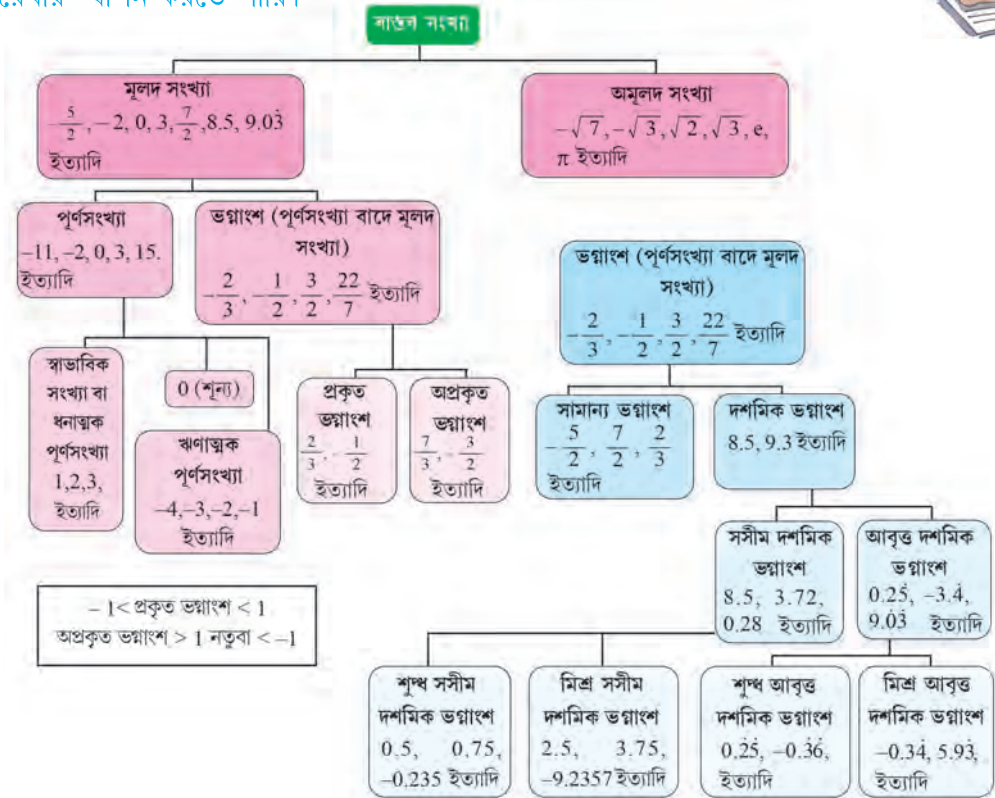
প্রথমে, $2.6\dot{7}$ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাটি 3 দশমিক পর্যন্ত লিখে পাই, $2.6\dot{7} = 2.677....$

(i) $2.6\dot{7}$ সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় 2 ও 3-এর মধ্যে অবস্থিত। তাই আগের মতো 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে 10টি সমানভাগে ভাগ করলাম।

(ii) এবার যেহেতু 2.677, সংখ্যাটি 2.6 ও 2.7-এর মধ্যে আছে তাই 2.6 থেকে 2.7-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে আবার 10টি সমান ভাগে ভাগ করলাম।

(iii) আবার যেহেতু 2.677 সংখ্যাটি 2.67 ও 2.68-এর মধ্যে আছে তাই 2.67 থেকে 2.68-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে আবার 10টি সমান ভাগে ভাগ করলাম। $2.6\dot{7}$, 2.677 এবং 2.678 এর মধ্যে আছে।

(iv) আরও নিখুঁত মান পাওয়ার জন্য 2.677 ও 2.678-এর মধ্যবর্তী সরলরেখাংশকে 10টি সমান ভাগে ভাগ করলাম। উপরের চিত্রে দেখছি, $2.6\dot{7}$ সংখ্যাটি প্রতিস্থাপন করে যে বিন্দুটি পেলাম তা 2.677-এর থেকে 2.678-এর বেশি কাছে অবস্থিত এবং 2.677 ও 2.678-এর মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যাও আছে।

আবৃত্ত দশমিকদের সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করে সেই সামান্য ভগ্নাংশকে আমরা সংখ্যারেখায় স্থাপন করতে পারি।

কষে দেখি—1.3

1. ভাগ না করে নীচের কোন সংখ্যাগুলির দশমিকে বিস্তার সসীম হবে লিখি

   (i) $\frac{17}{80}$ (ii) $\frac{13}{24}$ (iii) $\frac{17}{12}$ (iv) $\frac{16}{125}$ (v) $\frac{4}{35}$

2. নীচের প্রত্যেক সংখ্যার দশমিকে বিস্তার করি ও কী ধরনের দশমিকে বিস্তার পাব লিখি।

   (i) $\frac{1}{11}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{3}{13}$ (iv) $3\frac{1}{8}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{7}{25}$

3. নীচের প্রতিটি সংখ্যা $\frac{p}{q}$ আকার প্রকাশ করি, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$

   (i) $0.\dot{3}$ (ii) $1.\dot{3}$ (iii) $0.5\dot{4}$ (iv) $0.\dot{3}\dot{4}$ (v) $3.\dot{1}\dot{4}$

   (vi) $0.1\dot{7}$ (vii) $0.4\dot{7}$ (viii) $0.\dot{5}\dot{4}$ (ix) $0.0\dot{0}\dot{1}$ (x) $0.\dot{1}6\dot{3}$

4. 4 টি সংখ্যা লিখি যাদের দশমিকে বিস্তার অসীম ও অনাবৃত্ত [Nonterminating and non recurring]।

5. $\frac{5}{7}$ ও $\frac{9}{7}$ এর মধ্যে 3টি ভিন্ন অমূলদ সংখ্যা লিখি।

6. $\frac{3}{7}$ ও $\frac{1}{11}$ -এর মধ্যে 2টি ভিন্ন অমূলদ সংখ্যা লিখি।

7. নীচের সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনটি মূলদ সংখ্যা এবং কোনটি অমূলদ সংখ্যা লিখি।

   (i) $\sqrt{47}$ (ii) $\sqrt{625}$ (iii) 6.5757... (iv) 1.1010010001...

8. সংখ্যারেখায় নীচের সংখ্যাগুলি স্থাপন করি :

   (i) 5.762 (ii) 2.321 (iii) 1.052 (iv) 4.178

9. $2.\dot{2}\dot{6}$ ও $5.5\dot{4}$ সংখ্যাদুটি 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত সংখ্যারেখায় স্থাপন করি।

10. 0.232332333233332... এবং 0.212112111211112... সংখ্যা দুটির মধ্যে দুটি মূলদ সংখ্যা লিখি।

11. 0.2101এবং 0.2222... বা $0.\dot{2}$ -এর মধ্যে দুটি মূলদ সংখ্যা লিখি।

12. স্বাভাবিক সংখ্যা, অখণ্ড সংখ্যা, পূর্ণসংখ্যা, মূলদ সংখ্যা, অমূলদ সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যা নিয়ে দশটি সত্য বক্তব্য ও দশটি মিথ্যা বক্তব্য লিখি।

13. একটি গুণ করতে 2 টাকা ও একটি যোগ করতে 1 টাকা লাগলে নীচের সংখ্যামালাগুলির মান নির্ণয় করতে কত টাকা লাগবে দেখি এবং কী নিয়ম ব্যবহার করে সবচেয়ে কম কত টাকায় সংখ্যামালাটির মান বার করা যায় দেখি :

    (i) $3x^2 + 2x + 1$, যখন $x = 5$ **(ii)** $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$, যখন $x = 7$

(সংকেত: $3\times5^2+2\times5+1 = 3 \times 5 \times 5 + 2 \times 5 + 1$, এখানে দেখছি 3 টে গুণ ও 2 টো যোগ করতে লাগছে তাই মোট 8 টাকা লাগছে।

কিন্তু যদি বিচ্ছেদ নিয়ম প্রয়োগ করে, $3x^2 + 2x + 1 = x(3x+2) + 1$ লিখি তবে 2 টো গুণ ও 2 টো যোগ করতে হচ্ছে, তাই 6 টাকা লাগছে।)

14. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $\sqrt{5}$ -এর দশমিক বিস্তার

(a) একটি সসীম দশমিক
(b) একটি সসীম অথবা আবৃত্ত দশমিক
(c) একটি অসীম এবং অনাবৃত্ত দশমিক
(d) কোনোটিই নয়।

(ii) দুটি অমূলদ সংখ্যার গুণফল

(a) সর্বদাই অমূলদ সংখ্যা
(b) সর্বদাই মূলদ সংখ্যা
(c) সর্বদা একটি পূর্ণসংখ্যা
(d) মূলদ কিংবা অমূলদ সংখ্যা।

(iii) π এবং $\frac{22}{7}$

(a) দুটি মূলদ সংখ্যা
(b) দুটিই অমূলদ সংখ্যা
(c) π মূলদ সংখ্যা এবং $\frac{22}{7}$ অমূলদ সংখ্যা
(d) π অমূলদ সংখ্যা এবং $\frac{22}{7}$ মূলদ সংখ্যা

(iv) দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে

(a) কোনো মূলদ সংখ্যা নেই
(b) একটি মাত্র মূলদ সংখ্যা আছে
(c) অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে
(d) কোনো অমূলদ সংখ্যা নেই

(v) দুটি অমূলদ সংখ্যার মধ্যে

(a) কোনো মূলদ সংখ্যা নেই
(b) একটি মাত্র অমূলদ সংখ্যা আছে
(c) অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা আছে
(d) কোনো অমূলদ সংখ্যা নেই।

(vi) 0 সংখ্যাটি

(a) অখণ্ড সংখ্যা কিন্তু পূর্ণসংখ্যা নয়।
(b) পূর্ণসংখ্যা কিন্তু মূলদ সংখ্যা নয়।
(c) মূলদ সংখ্যা কিন্তু বাস্তব সংখ্যা নয়।
(d) অখণ্ড সংখ্যা, পূর্ণসংখ্যা, মূলদ সংখ্যা এবং বাস্তব সংখ্যা কিন্তু অমূলদ সংখ্যা নয়।

15. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(i) একটি উদাহরণ লিখি যেখানে দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(ii) একটি উদাহরণ লিখি যেখানে দুটি অমূলদ সংখ্যার বিয়োগফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(iii) $\frac{1}{7}$ এবং $\frac{2}{7}$ এর মধ্যে একটি মূলদ সংখ্যা লিখি।

(iv) $\frac{1}{7}$ এবং $\frac{2}{7}$ এর মধ্যে একটি অমূলদ সংখ্যা লিখি।

(v) $.012\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাকে সামান্য ভগ্নাংশে লিখি।

2 সূচকের নিয়মাবলি
(LAWS OF INDICES)

এখন আমাদের স্কুলে ছুটি। প্রায় আট দিন স্কুল বন্ধ থাকবে। আমরা পাঁচ বন্ধু মিলে ঠিক করেছি এই কয়েকদিন ঘুড়ি ওড়াব। তাই আমার বাবা আমাদের কিছু ঘুড়ি ও লাটাই কিনে দিয়েছেন।

কিন্তু ঘুড়ি ওড়াবার জন্য আরও অনেক সুতো দরকার। তাই আমরা প্রত্যেকে 2 টাকা দিয়ে মোট 2 টাকা + 2 টাকা + 2 টাকা + 2 টাকা + 2 টাকা = 5 × 2 টাকা চাঁদা তুললাম।

1 যদি আমরা x জন বন্ধু হতাম এবং প্রত্যেকে 2টাকা চাঁদা দিতাম, তাহলে মোট কত টাকা চাঁদা উঠত হিসাব করি।

মোট চাঁদা উঠত = 2 টাকা + 2 টাকা + ... +2 টাকা (x বার) = x × 2 টাকা = 2x টাকা

2x -এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় 2-কে x এর কী বলা হয়?

2, x -এর **সহগ [Coefficient]** ।

2 আমাদের 5 × 2 টাকার বেশি টাকা দরকার। তাই আমরা 5 জন বন্ধু প্রত্যেকে 5 টাকা চাঁদা দিলাম।

∴ এখন মোট চাঁদা উঠল = 5 টাকা + 5 টাকা + 5 টাকা + 5 টাকা + 5 টাকা = 5 × 5 টাকা = 5^2 টাকা

3 আমরা x জন বন্ধু যদি প্রত্যেকে x টাকা চাঁদা দিতাম, তাহলে মোট কত চাঁদা উঠত হিসাব করি।

মোট চাঁদা হত = x টাকা + x টাকা + x টাকা + x টাকা + ... + x টাকা (x বার) = x × x টাকা = x^2 টাকা

x^2 -কে কী বলা হয়? x^2 -এ 2 এবং x-কে কী বলা হয়?

x^2 -কে x-এর দ্বিঘাত বলে। x^2 এ 2 **সূচক [Index]** এবং x **নিধান [Base]**।

4 যদি 6 বার x গুণ করি, $x \times x \times x \times x \times x \times x = x^6$

এখানে x^6 -এ, 6 ☐ এবং x ☐ [নিজে করি]

∴ আমরা লিখতে পারি,

x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে x . x . x...... x (n সংখ্যক) = x^n, এক্ষেত্রে n এবং x-কে x^n-এর যথাক্রমে **সূচক [Index]** এবং **নিধান [Base]** বলা হয়। x^nকে x-এর n ঘাত বলা হয়।

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $x^n = x . x . . . x$ (n সংখ্যক), (যেখানে x একটি বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

$x^1 = x$

5 আমি x^5 ও x^3 গুণ করে কী পাই দেখি।

$x^5 \times x^3 = (x. x. x. x. x) \times (x. x. x) = x. x. x. x. x. x. x. x = x^8 = x^{5+3}$

একইভাবে, $x^3 \times x^5 = x^8 = x^{3+5}$

6 আমি x^m ও x^n গুণ করি [যেখানে x বাস্তব সংখ্যা এবং m, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা] এবং কী পাই দেখি।

$x^m \times x^n$ = {x . x . x.... x (m সংখ্যক)} × { x . x . x.... x (n সংখ্যক)}

= x . x . x.... x (m+n সংখ্যক) = x^{m+n}

পেলাম x কোনো বাস্তব সংখ্যা এবং m ও n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $x^m \times x^n = x^{m+n}$ হয়।

$x^m \times x^n = x^{m+n}$ –কে কী বলা হয়?

$x^m \times x^n = x^{m+n}$ (যেখানে x বাস্তব সংখ্যা এবং m, n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) –কে **সূচকের মৌলিক নিয়ম [Fundamental Law of Indices]** বলা হয়।

7 আমি x^5-কে x^3 দিয়ে ও x^3-কে x^5 দিয়ে ভাগ করি [যেখানে x শূন্য ছাড়া বাস্তব সংখ্যা] ও কী পাই দেখি।

$$x^5 \div x^3 = \frac{x^5}{x^3} = \frac{x.x.x.x.x}{x.x.x} = x^2 = x^{5-3} \quad \text{আবার,} \quad x^3 \div x^5 = \frac{x^3}{x^5} = \frac{x.x.x}{x.x.x.x.x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{5-3}}$$

8 আমি x^m -কে x^n দিয়ে ভাগ করি [x শূন্য ছাড়া বাস্তব সংখ্যা এবং m, n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা] ও কী পাই দেখি।

$$x^m \div x^n = \frac{x^m}{x^n} = \frac{x.x.x........x \ (m \text{ সংখ্যক})}{x.x.x........x \ (n \text{ সংখ্যক})} = x.x.x......x\{(m-n) \text{ সংখ্যক, যখন } m > n\} = x^{m-n}$$

[লব ও হর থেকে n সংখ্যক x অপসারণ করে পেলাম]

একইভাবে, $x^m \div x^n = \dfrac{1}{x^{n-m}}$, যখন $n > m$

পেলাম, x শূন্য ছাড়া যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা এবং m ও n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে,

$$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & \text{যখন } m > n \\ \dfrac{1}{x^{n-m}} & \text{যখন } n > m \end{cases}$$

9 এখন খুব ঘুড়ির চাহিদা। কারণ এখন পাড়ার বেশির ভাগ ছেলেমেয়েরা বিকালে ঘুড়ি ওড়ায়। তাই পাড়ার মিঠুদিদিও ঘুড়ি বিক্রি করছে। সজল বলল মিঠুদিদির কাছে $(2^2)^4$ টি ঘুড়ি আছে। কিন্তু $(2^2)^4$ কতগুলি ঘুড়ি হিসাব করি।

$$(2^2)^4 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^8 = 2^{2\times4} = 256$$

10 x একটি বাস্তব সংখ্যা এবং m, n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে $(x^m)^n$-এর কী মান পাই দেখি।

$(x^m)^n = x^m \cdot x^m ...... x^m$ (n সংখ্যক)

$= x^{m+m+.......+m \ (n \text{ সংখ্যক})}$

$= x^{mn}$ [যেহেতু m ও n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং mn-ও একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।]

পেলাম, x একটি বাস্তব সংখ্যা এবং m, n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $(x^m)^n = x^{mn}$

11 মিঠুদিদির দোকানে 2^8 টি ঘুড়ি আছে। কিন্তু দীপুকাকুর কারখানায় অনেক বেশি ঘুড়ি আছে। যদি দীপুকাকুর কারখানায় 6^8 টি ঘুড়ি থাকে, তবে দীপুকাকুর কারখানায় মিঠুদিদির দোকানের ঘুড়ির কতগুণ ঘুড়ি আছে হিসাব করি।

$$6^8 = (3\times2)^8 = (3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)\cdot(3\times2)$$
$$= (3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) \times (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)$$
$$= 3^8 \times 2^8$$

∴ দীপুকাকুর কারখানায় মিঠুদিদির দোকানের 3^8 গুণ ঘুড়ি আছে।

12 x ও y দুটি বাস্তব সংখ্যা এবং m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $(xy)^m$ কী হবে দেখি।

$(xy)^m = (xy)\cdot(xy)\cdot(xy) \ . . . . . \ (xy)$ (m সংখ্যক)

$= \{x\cdot x\cdot x \ . . . . \ x$ (m সংখ্যক)$\} \times \{y\cdot y\cdot y \ . . . . \ y$ (m সংখ্যক)$\}$

$= x^m y^m$

13 আমি একইভাবে $\left(\frac{x}{y}\right)^m$ কী হবে দেখি, যেখানে x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা ও y শূন্য ছাড়া বাস্তব সংখ্যা এবং m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ($\because$ 0 দিয়ে ভাগ অসংজ্ঞাত)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\;\cdots\cdots\;\frac{x}{y}\text{ (m সংখ্যক)} = \frac{x\cdot x\cdot x\;\ldots\; x\text{ (m সংখ্যক)}}{y\cdot y\cdot y\;\ldots\; y\text{ (m সংখ্যক)}} = \frac{x^m}{y^m}$$

$\therefore$ পেলাম, x ও y যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা এবং m যেকোনো একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে,

$(xy)^m = x^m y^m$ এবং $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ (যেখানে $y \neq 0$)

আমরা সূচকের কী কী নিয়মাবলি পেলাম লিখি।

x ও y যেকোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা এবং m, n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে,

(i) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(ii) $x^m \div x^n = \begin{cases} x^{m-n} & \text{যখন } m > n, \\ \frac{1}{x^{n-m}} & \text{যখন } n > m, \end{cases}$ $x \neq 0$

(iii) $(x^m)^n = x^{mn}$

(iv) $(xy)^m = x^m \cdot y^m$

(v) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$, $y \neq 0$

14 আমি উপরের সূচকের নিয়মাবলির সাহায্যে নীচের সংখ্যাগুলির সরলতম মান লিখি:

(i) $\frac{2^7 \cdot 3^9}{6^6 \cdot 3^2}$ **(ii)** $\frac{40^{12}}{5^9\, 2^{30}}$ **(iii)** $\frac{63^5}{7^4\, 3^8}$ **(iv)** $\frac{33^4 \times 6^3 \times 2^1}{12^5 \times 11^2}$

(v) $(0.125)^9 \times 8^9$ **(vi)** $2^3 \times (0.7)^3 \times 5^3$ **(vii)** $(-2)^3 \times (-2)^5$ **(viii)** $(-2)^4 \times (-3)^4$

(i) $\frac{2^7 \cdot 3^9}{6^6 \cdot 3^2} = \frac{2^7 \cdot 3^9}{(3\times2)^6 \cdot 3^2} = \frac{2^7 \cdot 3^9}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 3^2} = \frac{2^{7-6} \cdot 3^9}{3^8} = 2 \cdot 3^{9-8} = 6$

(ii) $\frac{40^{12}}{5^9\, 2^{30}} = \frac{(8\times5)^{12}}{5^9\, 2^{30}} = \frac{8^{12} \cdot 5^{12}}{5^9 \cdot 2^{30}} = \frac{\{(2)^3\}^{12} \cdot 5^{12}}{5^9 \cdot 2^{30}} = \frac{2^{36} \cdot 5^{12-9}}{2^{30}} = 2^{36-30} \cdot 5^3 = 2^6 \cdot 5^3 = 8000$

(v) $(0.125)^9 \times 8^9 = (0.125 \times 8)^9 = (1.000)^9 = (1)^9 = 1$

একইভাবে (iii), (iv) ,(vi), (vii) ও (viii)-এর সরলতম মান নিজে লিখি।

15 আমার কাছে 2^5 টি ঘুড়ি আছে। আমি 2^3 জনের মধ্যে ঘুড়িগুলি সমান ভাগে ভাগ করে দেব। হিসাব করে দেখি প্রত্যেকে কতগুলি ঘুড়ি পাবে।

প্রত্যেকে পাবে $(2^5 \div 2^3)$ টি $= 2^{5-3}$ টি $= 2^2$ টি ঘুড়ি।

16 কিন্তু আমি যদি 2^5 টি ঘুড়ি 2^5 জনের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দিই তবে প্রত্যেকে কতগুলি ঘুড়ি পাবে হিসাব করে দেখি।

সেক্ষেত্রে প্রত্যেকে পাবে $(2^5 \div 2^5)$ টি $= \frac{2^5}{2^5}$ টি $= 1$ টি

কিন্তু 2^0 মানে কত?

যদি $2^0 = 1$ ধরি, তাহলে $a^m \div a^n = a^{m-n}$ সূত্রটি মান্যতা পায় $m = n$ -এর জন্য, যখন, $a \neq 0$

অর্থাৎ আমরা লিখতে পারি $2^5 \div 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$

সংজ্ঞা অনুযায়ী যদি x একটি (শূন্য ছাড়া) বাস্তব সংখ্যা হয় এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহলে

(vi) $x^0 = 1$ (vii) $x^{-1} = \frac{1}{x}$ (viii) $x^{-n} = (x^{-1})^n$

এই সংজ্ঞার পর x^n মানে বুঝতে পারলাম যেখানে x শূন্য ছাড়া বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

∴ পেলাম, x শূন্য ছাড়া যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে,

(ix) $x^{-n} = (x^{-1})^n = \frac{1}{x^n}$ হবে, যেখানে n যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

17 $x^{-3} \times x^5$ কত হবে দেখি (যেখানে x শূন্য ছাড়া বাস্তব সংখ্যা)।

$x^{-3} \times x^5 = (x^{-1})^3 \times x^5 = \frac{1}{x^3} \times x^5 = x^{5-3} = x^2$

18 $x^{-3} \times x^{-6}$ কত হবে দেখি (যেখানে x শূন্য ছাড়া বাস্তব সংখ্যা)।

$x^{-3} \times x^{-6} = (x^{-1})^3 \times (x^{-1})^6 = \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{x^6} = \frac{1}{x^{3+6}} = \frac{1}{x^9} = x^{-9} = x^{(-3)+(-6)}$

সূচকের নিয়মাবলি সত্য হবে যদি x একটি (শূন্য ছাড়া) বাস্তব সংখ্যা হয় এবং m ও n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়।

19 আমি 2^{2^3} এবং $(2^2)^3$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো হিসাব করে লিখি।

$2^{2^3} = 2^8$ এবং $(2^2)^3 = 2^6$ যেহেতু, $2^8 > 2^6$ $\therefore 2^{2^3} > (2^2)^3$

20 2^{300} ও 3^{200}- এর মধ্যে কোনটি বৃহত্তর হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

21 m ও n যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হলে নীচের দুটি ক্ষেত্রে সরলতম মান নির্ণয় করি।

(i) $\frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{6^m.3^{m-n-1}}$ (ii) $\frac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.6^n}{15^m.10^{n+2}.6^m}$

(i) $\frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{6^m.3^{m-n-1}} = \frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{(3\times2)^m.3^{m-n-1}} = \frac{2^{m+2}.3^{2m-n}}{3^m.2^m.3^{m-n-1}} = \frac{2^{m+2-m}.3^{2m-n}}{3^{m+m-n-1}} = \frac{4.3^{2m-n}}{3^{2m-n-1}} = 4.3^{2m-n-2m+n+1}$

$= 4.3 = 12$

সমাধান, (ii) -এর সরলতম মান ☐। [নিজে করি]

22 আমরা ছুটির আটদিন খুব মজা করেছি ও অনেক ঘুড়ি উড়িয়েছি। এখনও তৃষা ও শাকিলের কাছে অনেকগুলি ঘুড়ি পড়ে আছে। তৃষার কাছে যতগুলি ঘুড়ি পড়ে আছে তার বর্গ করলে 36 হবে। কিন্তু শাকিলের কাছে যতগুলি ঘুড়ি পড়ে আছে তার ঘন করলে 27 হবে। হিসেব করে দেখি কার কাছে কতগুলি ঘুড়ি পড়ে আছে।

ধরি, তৃষার কাছে পড়ে আছে x টি ঘুড়ি

সুতরাং, $x^2=36$

বা, $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ $\therefore x = 6$ [যেহেতু ঘুড়ির সংখ্যা ঋণাত্মক হয় না]

পেলাম, $x = 36^{1/2} = 6$, x কে 36 -এর বর্গমূল বলে।

ধরি, শাকিলের কাছে y টি ঘুড়ি আছে।

সুতরাং $y^3 = 27$

$\therefore$ $y = 27^{1/3}$, y কে, 27-এর ঘনমূল বলে।

যেহেতু $3^3 = 27$

$\therefore$ $27^{1/3} = 3$

সুতরাং তৃষার কাছে 6 টি ঘুড়ি ও শাকিলের কাছে 3 টি ঘুড়ি আছে।

∵ x=6 হলে, $x^2=36$
x= –6 হলে, $x^2=36$
তাই, $x^2=36$ হলে,
$x = \pm\sqrt{36}$

বুঝেছি, যদি a একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, a-এর বর্গমূল $=a^{1/2}$ এবং a-এর ঘনমূল $a^{1/3}$

কিন্তু $a^{1/n}$-কে কী বলব, যেখানে n যে-কোনো একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা?

$a^{1/n}$-কে a- এর n -তম মূল বলা হয়।

অর্থাৎ যে-কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এবং যে-কোনো ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a-এর জন্য $a^{1/n}$ একটি অনন্য (Unique) ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x হবে যদি $x^n=a$ হয়। x-কে a-এর n -তম মূল বলা হয়। ওই x কেই $\sqrt[n]{a}$ বা $a^{1/n}$ লিখি। 0-এর nতম মূল 0 নিজেই।

যেহেতু $3^3=27$

$\therefore 27^{1/3}=3$ $\therefore$ 3,27-এর একটি ঘনমূল।

আবার, $2^6=64$

$\therefore (64)^{1/6}=\square$ $\therefore$ 2,64-এর একটি ষষ্ঠমূল।

যদি a ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা হয় তবে $a^{1/n}$ একটি অনন্য ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা x হবে, যদি $x^n=a$ হয়। যেমন $(-8)^{1/3}=-2$, $(-27)^{1/3}=-3$ যেহেতু $(-2)^3=-8$ এবং $(-3)^3=-27$

23 কিন্তু $(27)^{4/3}$ -এর মান কীভাবে পাবো দেখি।

$$(27)^{4/3}=(27^{1/3})^4=(3)^4=81$$

এবং $(64)^{5/6}=(64^{1/6})^5=\square^5=\square$ [নিজে লিখি]

বুঝেছি, a-এর মান যেকোনো ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, q এর মান যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং p যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হলে $a^{p/q}=(a^{1/q})^p$ হবে, যেখানে $a^{1/q}$ হল a-র q তম মূল এবং $(a^{1/q})^p$ হল $a^{1/q}$ -এর পূর্ণসংখ্যার সূচকের সংখ্যা অনুযায়ী মান।

যেমন, **(i)** $8^{5/3}=(8^{1/3})^5=2^5=32$ **(ii)** $(27)^{-4/3}=(27^{1/3})^{-4}=(3)^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$

সুতরাং ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার মূলদ ঘাতের সংজ্ঞা পেলাম। ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা a -এর মূলদ ঘাত $\frac{p}{q}$ -এর সংজ্ঞা পেলাম যেখানে q বিজোড় সংখ্যা। যেমন $(-32)^{4/5}=\{(-32)^{1/5}\}^4=(-2)^4=16$

আবার, $a^{-2/5}\times a^{3/2}=a^{-4/10}\times a^{15/10}=(a^{1/10})^{-4}\times(a^{1/10})^{15}=(a^{1/10})^{-4+15}=(a^{1/10})^{11}=a^{11/10}=a^{-2/5+3/2}$

বাস্তব সংখ্যার মূলদ ঘাতের ক্ষেত্রেও সূচকের নিয়মাবলি প্রযোজ্য যেখানে তারা সংজ্ঞায়িত।

24 আমি $\frac{2}{8^{-2/3}}\times\frac{\sqrt[6]{2}}{4^{-5/12}}$ রাশিমালাটির সরলতম মান নির্ণয় করি।

$$\frac{2}{8^{-2/3}}\times\frac{\sqrt[6]{2}}{4^{-5/12}}=\frac{2}{(2^3)^{-2/3}}\times\frac{2^{1/6}}{(2^2)^{-5/12}}=\frac{2}{2^{3\times(-2/3)}}\times\frac{2^{1/6}}{2^{2\times(-5/12)}}=\frac{2}{2^{-2}}\times\frac{2^{1/6}}{2^{-5/6}}=2\times2^2\times2^{1/6+5/6}$$

$$=2^{1+2+6/6}=2^{1+2+1}=16$$

25 আমি $\{((32)^{-2/3})^{3/4}\}^{4/5}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

26 $[\{(81^{-\frac{3}{4}})^{\frac{1}{9}}\}^3]^{-1}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

27 আমি $[(\frac{x^b}{x^c})^{b+c}\times(\frac{x^c}{x^a})^{c+a}\times(\frac{x^a}{x^b})^{a+b}]$-এর সরলতম মান হিসাব করে লিখি।

সমাধান : $(\frac{x^b}{x^c})^{b+c}\times(\frac{x^c}{x^a})^{c+a}\times(\frac{x^a}{x^b})^{a+b}$

$$=(x^{b-c})^{b+c}\times(x^{c-a})^{c+a}\times(x^{a-b})^{a+b}=x^{b^2-c^2}\times x^{c^2-a^2}\times x^{a^2-b^2}=x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$$

$=x^0=1$ নির্ণীত মান $=1$

28 তীর্থ তার খাতায় $2^x = 128$ লিখেছে। তীর্থর লেখা $2^x = 128$ —সমীকরণ থেকে x এর মান কীভাবে পাবো হিসাব করে দেখি।

$2^x = 128$

বা, $2^x = 2^7$.......................... (i)

(i) নং সমীকরণ থেকে কীভাবে x এর মান পাব?

(x) a বাস্তব সংখ্যা ও $a \neq 0, 1, -1$ এবং x, y মূলদ সংখ্যা হলে, যদি $a^x = a^y$ হয়, তখন $x = y$ হবে

(xi) a, b ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা এবং x শূন্য ছাড়া যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, যদি $a^x = b^x$ হয়, তখন $a = b$

আবার, $a^x=b^x \Rightarrow x=0$

∴ $2^x = 2^7$ হলে, পাবো $x = 7$ [(x) নং থেকে পাই]

29 $a + b + c = 0$ হলে প্রমাণ করি যে, $\dfrac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \dfrac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$

প্রমাণ: $\dfrac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \dfrac{1}{x^c + x^{-a} + 1} \quad \dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$$= \frac{x^{-b}}{x^{-b}(x^b + x^{-c} + 1)} + \frac{x^a}{x^a(x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{(x^a + x^{-b} + 1)}$$

$$= \frac{x^{-b}}{x^{-b+b} + x^{-b-c} + x^{-b}} + \frac{x^a}{x^{a+c} + x^{a-a} + x^a} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{x^{-b}}{x^0 + x^a + x^{-b}} + \frac{x^a}{x^{-b} + x^0 + x^a} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{x^{-b}}{1 + x^a + x^{-b}} + \frac{x^a}{x^{-b} + 1 + x^a} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{x^{-b} + x^a + 1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1 \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

∵ $a + b + c = 0$
∴ $a = -b - c$ এবং
$a + c = -b$

30 $2^x = 3^y = 12^z$ হলে, প্রমাণ করি যে, $xy = z(x + 2y)$

ধরি, $2^x = 3^y = 12^z = k$ (যেখানে $k \neq 0, 1, -1$)

∴ $2^x = k$ ∴ $2 = k^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

আবার, $3^y = k$ ∴ $3 = k^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

আবার, $12^z = k$ ∴ $12 = k^{\frac{1}{z}}$ ...... (iii)

এখন, $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$

সুতরাং, $k^{1/z} = (k^{1/x})^2 \times k^{1/y}$

বা, $k^{1/z} = k^{2/x} \times k^{1/y}$

বা, $k^{1/z} = k^{2/x + 1/y}$

∴ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$ [∵ $a^x = a^y \Rightarrow x = y$ যখন, $a \neq 0, 1, -1$]

বা, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2y+x}{xy}$ ∴ $xy = z(x+2y)$ (প্রমাণিত)

সূচকের নিয়মাবলি মূলদ সূচকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হলো। কিন্তু অমূলদ সূচকের ক্ষেত্রেও কি সূচকের নিয়মাবলি প্রযোজ্য হবে?

$2^{\sqrt{2}}, 3^{\sqrt{7}}$ ইত্যাদি কী ধরনের বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ অমূলদ সূচক যুক্ত বাস্তব সংখ্যারা কী ধরনের বাস্তব সংখ্যা তা আমরা উঁচু শ্রেণিতে শিখব। কিন্তু আমরা ধরে নেব, এই ধরনের বাস্তব সংখ্যারাও সূচকের নিয়মাবলি মেনে চলবে যেখানে তারা সংজ্ঞায়িত।

31 $p^a = q^b = r^c$ এবং $pqr = 1$ হলে প্রমাণ করি যে $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ [নিজে করি]

কষে দেখি— 2

1. মান নির্ণয় করি :

(i) $(\sqrt[5]{8})^{\frac{5}{2}} \times (16)^{-\frac{3}{2}}$

(ii) $\{(125)^{-2} \times (16)^{-\frac{3}{2}}\}^{-\frac{1}{6}}$

(iii) $4^{\frac{1}{3}} \times [2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}] \div 9^{\frac{1}{4}}$

2. সরল করি :

(i) $(8a^3 \div 27x^{-3})^{\frac{2}{3}} \times (64a^3 \div 27x^{-3})^{-\frac{2}{3}}$

(ii) $\{(x^{-5})^{\frac{2}{3}}\}^{-\frac{3}{10}}$

(iii) $[\{(2^{-1})^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

(iv) $\sqrt[3]{a^{-2}.\, b} \times \sqrt[3]{b^{-2}.\, c} \times \sqrt[3]{c^{-2}.\, a}$

(v) $\left(\frac{4^{m+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2.2^m}}{2.\sqrt{2^{-m}}}\right)^{\frac{1}{m}}$

(vi) $9^{-3} \times \frac{16^{\frac{1}{4}}}{6^{-2}} \times \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

(vii) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

3. মানের ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাই :

(i) $5^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{3}}$

(ii) $3^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}, 8^{\frac{1}{4}}$

(iii) $2^{60}, 3^{48}, 4^{36}, 5^{24}$

4. প্রমাণ করি :

(i) $\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^p \times \left(\frac{a^r}{a^p}\right)^q \times \left(\frac{a^p}{a^q}\right)^r = 1$

(ii) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \left(\frac{x^n}{x^\ell}\right)^{n+\ell} \left(\frac{x^\ell}{x^m}\right)^{\ell+m}$

(iii) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-\ell} \times \left(\frac{x^n}{x^\ell}\right)^{n+\ell-m} \times \left(\frac{x^\ell}{x^m}\right)^{\ell+m-n} = 1$

(iv) $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}} = 1$

5. $x + z = 2y$ এবং $b^2 = ac$ হলে, দেখাই যে, $a^{y-z}\, b^{z-x}\, c^{x-y} = 1$

6. $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হলে, দেখাই যে, $a^{q-r}\, b^{r-p}\, c^{p-q} = 1$

7. $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz = 1$ হলে, দেখাই যে, $a + b + c = 0$

8. $a^x = b^y = c^z$ এবং $abc = 1$ হলে, দেখাই যে, $xy + yz + zx = 0$

9. সমাধান করি:

(i) $49^x = 7^3$ (ii) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 9$ (iii) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

(iv) $2^{4x} \,.\, 4^{3x-1} = \frac{4^{2x}}{2^{3x}}$ (v) $9 \times 81^x = 27^{2-x}$

(vi) $2^{5x+4} + 2^9 = 2^{10}$ (vii) $6^{2x+4} = 3^{3x}.2^{x+8}$

10. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) $(0.243)^{0.2} \times (10)^{0.6}$ -এর মান

(a) 0.3 (b) 3 (c) 0.9 (d) 9

(ii) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times (16)^{\frac{1}{2}}$ -এর মান

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) $\frac{1}{2}$

(iii) $4^x = 8^3$ হলে, x -এর মান

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) 3 (d) 9

(iv) $20^{-x} = \frac{1}{7}$ হলে, $(20)^{2x}$ -এর মান

(a) $\frac{1}{49}$ (b) 7 (c) 49 (d) 1

(v) $4 \times 5^x = 500$ হলে, x^x -এর মান

(a) 8 (b) 1 (c) 64 (d) 27

11. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) $(27)^x = (81)^y$ হলে, x:y কত হয় লিখি।

(ii) $(5^5 + 0.01)^2 - (5^5 - 0.01)^2 = 5^x$ হলে, x -এর মান কত হিসাব করে লিখি।

(iii) $3 \times 27^x = 9^{x+4}$ হলে, x -এর মান কত হিসাব করে লিখি।

(iv) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}}$ -এর মান কত হিসাব করে লিখি।

(v) 3^{3^3} এবং $(3^3)^3$ -এর মধ্যে কোনটি বৃহত্তর যুক্তিসহ লিখি।

3 লেখচিত্র (GRAPH)

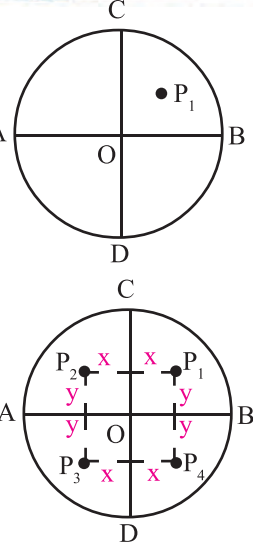
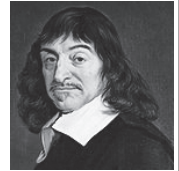
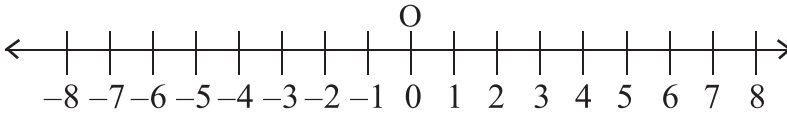
আমাদের ক্লাসের আমিনা, ধ্রুব, রূপা ও হাবিব স্কুলের বৃত্তাকার মাঠে ক্রিকেট খেলা দেখছিল। ওরা দেখল মাঠের মধ্যে ওদের বন্ধু দীপ্তার্ক একটা জায়গায় দাঁড়িয়ে আছে। ওরা নিজেরা আলোচনা করতে লাগল দীপ্তার্ক মাঠের ঠিক কোথায় দাঁড়িয়ে আছে তা কীভাবে বার করব।

ওরা খাতায় একটি বৃত্ত এঁকে দীপ্তার্কর সঠিক অবস্থান বার করার চেষ্টা করল। P_1 বিন্দুতে যদি দীপ্তার্ক দাড়িয়ে থাকে তবে ওর অবস্থান জানতে প্রথমে ওরা খাতায় বৃত্তের পরস্পর লম্ব দুটি ব্যাস AB ও CD আঁকল এবং ব্যাস দুটির ছেদবিন্দু অর্থাৎ বৃত্তটির কেন্দ্রের নাম O দিল।

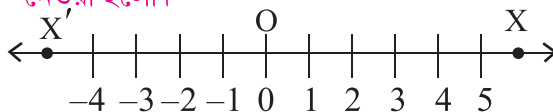
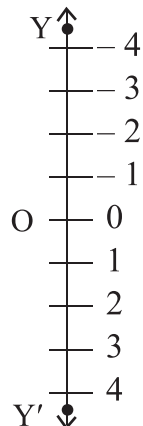
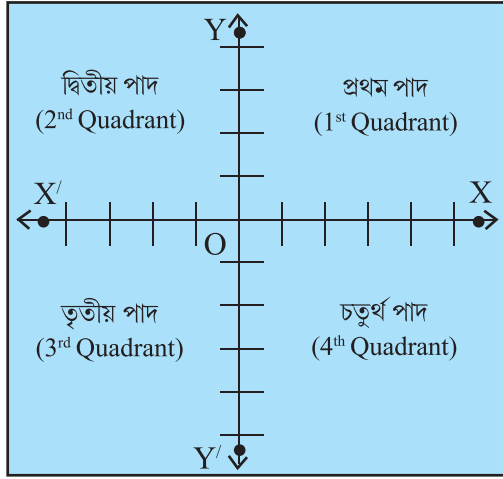
P_1 বিন্দুর দূরত্ব CD থেকে যদি x একক এবং AB থেকে y একক হয়, তাহলে এই x একক এবং y একক দূরত্বের সাহায্যে আমরা P_1 বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে পারি।

কিন্তু CD থেকে x একক এবং AB থেকে y একক দূরত্বে P_1 বিন্দুর আরও তিনটি অবস্থান, P_2, P_3, P_4 পাচ্ছি।

কিন্তু যদি বলি P_1 বিন্দু AB সরলরেখাংশের ওপরের দিকে আর CD সরলরেখাংশের ডানদিকে এবং CD থেকে x একক এবং AB থেকে y একক দূরত্বে থাকে তাহলে P_1 বিন্দুর একটিই নির্দিষ্ট অবস্থান দেখতে পাচ্ছি।

তাই দীপ্তার্ক মাঠের কোথায় আছে এখন বলতে পারব।

একই তলস্থিত কোনো বিন্দুর নির্দিষ্ট অবস্থান নির্ণয় করতে গেলে পরস্পর লম্ব দুটি অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট দিকে ওই বিন্দুর লম্ব দূরত্ব কত তা জানা দরকার। এই ধারণাই গণিতে একটি বিশেষ শাখার মূল বিষয়—গণিতের সেই শাখা হলো স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Coordinate Geometry)। এই ধারণার জনক ফরাসি দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ রেনে দে' কার্তে।

কার্তেজীয় পদ্ধতি (Cartesian System)

এটি ☐ রেখা।

এই রেখায় O হলো মূলবিন্দু। O থেকে ধনাত্মক দিকে 4 এর দূরত্ব 4 একক এবং একইভাবে ঋনাত্মক দিকে –2 এর দূরত্ব 2 একক। দে' কার্তে এই রকম দুটি সংখ্যারেখাকে একই তলে পরস্পর লম্বভাবে রেখে ওই তলের কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের ধারণার জন্ম দিয়েছিলেন।

দুটি সংখ্যারেখা XOX' ও YOY' নেওয়া হলো।

এই দুটি রেখাকে O-তে লম্বভাবে রাখলে পাই অনুভূমিক সরলরেখা XOX$'$ অর্থাৎ x -অক্ষ এবং উল্লম্ব সরলরেখা YOY$'$ অর্থাৎ y-অক্ষ। যেখানে XOX$'$ ও YOY$'$ পরস্পরকে ছেদ করেছে সেটি মূলবিন্দু O

যেহেতু ধনাত্মক সংখ্যাগুলি OX এবং OY দিকে অবস্থিত তাই OX কে x-অক্ষের ধনাত্মক দিক এবং OY কে y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বলা হয়। আবার যেহেতু ঋণাত্মক সংখ্যাগুলি OX$'$ এবং OY$'$ দিকে অবস্থিত তাই OX$'$ কে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক এবং OY$'$ -কে y -অক্ষের ঋণাত্মক দিক বলা হয়।

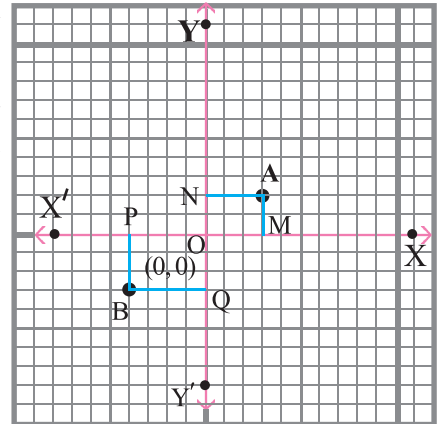
অক্ষগুলি তলকে 4টি অংশে বিভক্ত করেছে। এই 4টি অংশকে প্রথম পাদ, দ্বিতীয় পাদ, তৃতীয় পাদ ও চতুর্থ পাদ বলা হয়। আমরা ওই তলটিকে বলব **কার্তেজীয় তল** বা **স্থানাঙ্ক তল** বা **xy -তল**।

XOY কোণের মধ্যবর্তী অঞ্চলকে **প্রথম পাদ** বলা হয়।
YOX$'$ কোণের মধ্যে অবস্থিত অঞ্চলকে **দ্বিতীয় পাদ** বলা হয়।
X$'$OY$'$ কোণের মধ্যে অবস্থিত অঞ্চলকে **তৃতীয় পাদ** এবং
Y$'$OX কোণের মধ্যে অবস্থিত অঞ্চলকে **চতুর্থ পাদ** বলা হয়।

O কে **মূলবিন্দু** বলা হয়।

আমি ছক কাগজে XOX$'$ ও YOY$'$ দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ আঁকি এবং ছক কাগজের কোনো বিন্দু A-এর অবস্থান ওই অক্ষের সাহায্যে নির্দিষ্ট ভাবে কীভাবে নির্ণয় করতে পারি দেখি।

প্রথমে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরলাম। এবার A থেকে y-অক্ষের অপর AN লম্ব টানলাম। এরপর A থেকে x-অক্ষের ওপর AM লম্ব টানলাম। দেখলাম y-অক্ষ থেকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে A বিন্দুর লম্ব দূরত্ব NA = OM = 3 একক এবং x-অক্ষ থেকে y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে A বিন্দুর লম্ব দূরত্ব MA = ON = 2 একক।

একইরকম ভাবে y-অক্ষ থেকে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে B বিন্দুর লম্ব দূরত্ব QB = OP = 4 একক এবং x-অক্ষ থেকে y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে B বিন্দুর লম্ব দূরত্ব PB = OQ = 3 একক।

- কোনো বিন্দুর x স্থানাঙ্ক বা ভুজ হলো x-অক্ষ বরাবর y-অক্ষ থেকে ওই বিন্দুর চিহ্নসহ লম্ব দূরত্ব। (x-এর ধনাত্মক স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর এবং ঋণাত্মক স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে মূল বিন্দু থেকে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর মাপতে হয়।)
- কোনো বিন্দুর y স্থানাঙ্ক বা কোটি হলো y-অক্ষ বরাবর x-অক্ষ থেকে ওই বিন্দুর চিহ্নসহ লম্ব দূরত্ব। (y-এর ধনাত্মক স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে মূলবিন্দু থেকে y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর এবং ঋণাত্মক স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে মূল বিন্দু থেকে y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর মাপতে হয়।)
- স্থানাঙ্ক তলে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দিষ্ট ভাবে নির্দেশ করার সময় (x স্থানাঙ্ক, y স্থানাঙ্ক) এভাবে লেখা হয়। যেমন— A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2), O **মূলবিন্দুর** স্থানাঙ্ক (0, 0)

x-অক্ষের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দুর x-অক্ষ থেকে দূরত্ব [ ] একক। সুতরাং x -অক্ষস্থিত কোনো বিন্দুর y স্থানাঙ্ক [ ]। অর্থাৎ x -অক্ষস্থিত কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, 0)।
আবার y-অক্ষের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দুর y-অক্ষ থেকে দূরত্ব [ ] একক। সুতরাং y -অক্ষস্থিত কোনো বিন্দুর x-এর স্থানাঙ্ক [ ]। অর্থাৎ y -অক্ষস্থিত কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, y)।

x- অক্ষের ধনাত্মক দিকে x-অক্ষের উপর কোনো বিন্দু অবস্থিত হলে $x > 0$ এবং $y = 0$; আবার x -অক্ষের ঋণাত্মক দিকে x-অক্ষের উপর কোনো বিন্দু অবস্থিত হলে $x < 0$ এবং $y = 0$; y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে y-অক্ষের উপর কোনো বিন্দু অবস্থিত হলে $x = 0$ এবং $y > 0$। আবার y -অক্ষের ঋণাত্মক দিকে y-অক্ষের উপর কোনো বিন্দু অবস্থিত হলে $x = 0$ এবং $y < 0$

1 আমি ছক কাগজে XOX' ও YOY' দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ আঁকি এবং কিছু বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করে দেখি কোন বিন্দু কোন পাদে আছে।

ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন প্রণালী

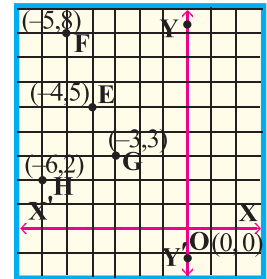
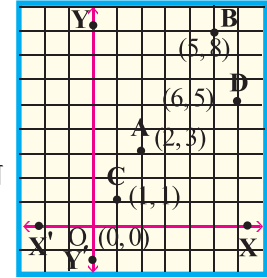
আমি প্রথমে ছক কাগজে এমন বিন্দু বসাই যার ভুজ ও কোটি ধনাত্মক।
[ছক কাগজে উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরলাম]
(2,3) বিন্দুটির ভুজ [ ] এবং কোটি [ ]

মূলবিন্দু O (0, 0) থেকে OX বরাবর 2 একক গিয়ে সেখান থেকে OY-এর সমান্তরালে উপরের দিকে 3 একক এগিয়ে A (2, 3) নির্দিষ্ট বিন্দুটি পেলাম। ওই বিন্দুটি পেনসিল দিয়ে চিহ্নিত করে তার পাশে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক লিখলাম।

একইভাবে B (5, 8), C (1, 1), D (6, 5), ... বিন্দুগুলি ছক কাগজে বসিয়ে দেখছি A, B, C, D, ... প্রতিটি বিন্দুই [ ] [প্রথম/দ্বিতীয়] পাদে আছে।

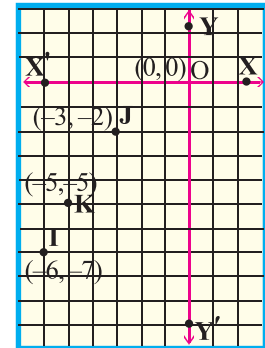
এবার আমি ছক কাগজে এমন কিছু বিন্দু স্থাপন করব যাদের ভুজ ঋণাত্মক কিন্তু কোটি ধনাত্মক।

(– 4, 5) স্থানাঙ্কের বিন্দুটির ভুজ [ ] এবং কোটি [ ] ; মূলবিন্দু O (0,0) থেকে OX' বরাবর অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর বামদিকে 4 একক গিয়ে সেখান থেকে OY এর সমান্তরালে উপরদিকে 5 একক গেলে E (–4, 5) বিন্দুটি পেলাম।

একইভাবে F (–5, 8), G (–3, 3), H (–6, 2) ,........ বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে দেখছি প্রতিটি বিন্দু [ ] পাদে আছে।

আমি (–6, –7) বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করি।

(–6, –7) বিন্দুটির ভুজ ও কোটি উভয়েই [ ]। তাই মূলবিন্দু O (0,0) থেকে OX' বরাবর 6 একক গিয়ে সেখান থেকে OY'-এর সমান্তরাল দিকে 7 একক নীচে গিয়ে I (–6, –7) বিন্দুটি পেলাম।

একইভাবে J (–3, –2), K (–5, –5), ... বিন্দুগুলি স্থাপন করে দেখছি প্রতিটি বিন্দু [ ] পাদে আছে।

আমি (4, –8) বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করি।

(4, –8) বিন্দুটির ভুজ ধনাত্মক এবং কোটি ☐। তাই মূলবিন্দু O (0,0) থেকে OX বরাবর 4 একক গিয়ে সেখান থেকে OY′ এর সমান্তরালে 8 একক নীচের দিকে গিয়ে L (4, –8) বিন্দুটি পেলাম।

একইভাবে M (6, –5), N (4, –4), ... বিন্দুগুলি স্থাপন করে দেখছি প্রতিটি বিন্দু ☐ পাদে আছে।

2 আমি মিজানুরের আঁকা ছক কাগজের বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক লিখি এবং কোন পাদে আছে লিখি।

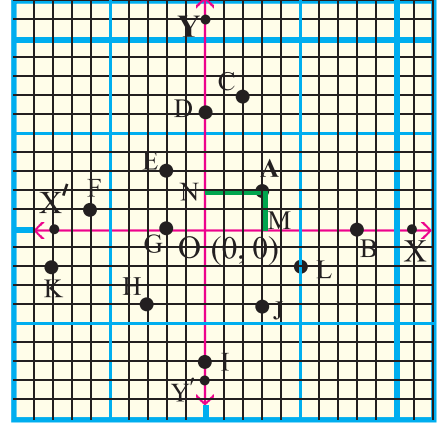
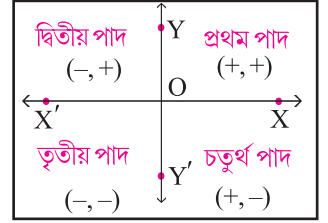
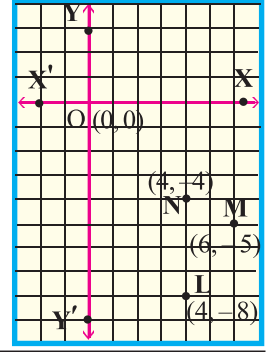
A বিন্দু থেকে OX এবং OY -এর উপর যথাক্রমে AM এবং AN লম্ব এঁকে দেখছি, OM = 3 একক অর্থাৎ y-অক্ষ থেকে দূরত্ব 3 একক এবং ON = 2 একক, অর্থাৎ x-অক্ষ থেকে দূরত্বে 2 একক।

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2)

অর্থাৎ পেলাম y -অক্ষ থেকে দূরত্ব x স্থানাঙ্ক এবং x-অক্ষ থেকে দূরত্ব y স্থানাঙ্ক।

একইভাবে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 0) [যেহেতু OX অক্ষের উপরে মূলবিন্দু থেকে 8 একক দূরে আছে]

অর্থাৎ (8,0) বিন্দুটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0,6) [যেহেতু OY অক্ষের উপরে মূলবিন্দু থেকে ☐ একক দূরে আছে] । অর্থাৎ (0,6) বিন্দুটি y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

কষে দেখি— 3.1

1. আমি ছক কাগজে নীচের বিন্দুগুলি স্থাপন করি এবং x-অক্ষের উপরদিকে বা নীচেরদিকে আছে লিখি—
   (3,–2), (–4,2), (4,5), (– 5,– 5), (–2,7), (7,–7), (0, 9), (0,– 9)
2. ছক কাগজে নীচের বিন্দুগুলি স্থাপন করি এবং y-অক্ষের ডানদিকে না বামদিকে আছে লিখি —
   (5, –7), (– 10, 10), (– 8,–4), (4, 3), (–6, 2), (11,–3), (4, 0), (–4, 0)
3. ছক কাগজে নীচের বিন্দুগুলি স্থাপন করি এবং কোথায় (কোন পাদে বা কোন অক্ষের উপর ও কোন দিকে) আছে লিখি —
   (–11,–7), (0,5), (9,0), (–4,–4), (12,–9), (3,13), (0,–6), (–5,0),
4. x-অক্ষের উপর যে কোনো চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।
5. y-অক্ষের উপর যে কোনো চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।
6. প্রতিটি পাদে অবস্থিত 4টি করে বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি
7. একটি বিন্দুর x-অক্ষ থেকে ধনাত্মক দিকে দূরত্ব 5 একক এবং y-অক্ষ থেকে ধনাত্মক দিকে দূরত্ব 7 একক। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক লিখি।

3.1 আমি ও মারিয়া বই-খাতার দোকান থেকে 16 টাকায় 2 টি গ্রাফ খাতা ও 3 টি পেনসিল কিনলাম। একটি গ্রাফ খাতা ও একটি পেনসিলের দাম কত হিসাব করি ।

ধরি, একটি গ্রাফ খাতার দাম x টাকা এবং একটি পেনসিলের দাম y টাকা

∴ 2 টি গ্রাফ খাতার দাম $2 \times x$ টাকা $= 2x$ টাকা

এবং 3 টি পেনসিলের দাম $3 \times y$ টাকা $= 3y$ টাকা

∴ মোট দাম $= (2x + 3y)$ টাকা

শর্তানুসারে, $2x + 3y = 16$ .... (i)

16 টাকায় 2 টি গ্রাফ খাতা ও 3 টি পেনসিল কেনা— এই বিবৃতিটি (i) নং সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করেছি এবং দুই চলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ পেয়েছি।

3.2 হিসাব করে দেখি x এবং y -এর কোন কোন মান (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ (i) নং সমীকরণের বামপক্ষে x এবং y -এর কোন কোন পূর্ণসংখ্যার মান বসিয়ে যোগফল 16 পাবো।

(i) নং সমীকরণে $x = 5$ ও $y = 2$ বসিয়ে পাই,
$2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 2 =$ ☐

এবার, (i) নং সমীকরণে $x = 2$ ও $y = 4$ বসিয়ে পাই,
$2x + 3y = 2 \times 2 + 3 \times 4 =$ 16

3.3 x এবং y -এর যে সকল মান $2x + 3y = 16$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাদের কী বলা হয়?

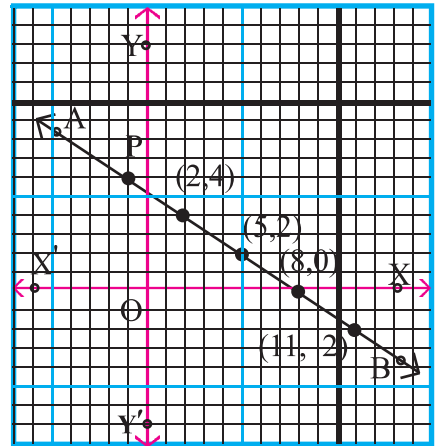
x এবং y-এর যে সকল মান (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে তারা (i) নং সমীকরণের সমাধান বা বীজ

বুঝেছি, (i) নং সমীকরণের অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে। সেগুলি,

x	8	5	2	11	.....
$y = \frac{16 - 2x}{3}$	0	2	4	–2	....

যে সব সমাধান পেলাম তার x ও y-এর মান যথাক্রমে x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্ক ধরে প্রত্যেক জোড়া সমাধানের জন্য লেখচিত্রে একটি করে বিন্দু পাবো।

মারিয়া ছক কাগজে XOX' এবং YOY' দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ এঁকে এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1একক ধরে (8,0), (5,2), (2,4) এবং (11, –2) বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করে যে সরলরেখাংশ পেল তা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার অংশ।

∴ $2x + 3y = 16$ একটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত বা রৈখিক সমীকরণ।

সুতরাং দুই চলবিশিষ্ট একঘাত বা রৈখিক সমীকরণের সাধারণরূপ $ax + by + c = 0$ (যেখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা)

$2x + 3y - 16 = 0$ সমীকরণে 2, 3, – 16 নির্দিষ্ট ধ্রুবক।
$ax + by + c = 0$ সমীকরণে a, b, c অনির্দিষ্ট ধ্রুবক (বাস্তব সংখ্যা)।

আমি $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর যে-কোনো একটি বিন্দু P নিলাম। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–1, 6)

(i) নং সমীকরণের বামপক্ষে $x = -1$ এবং $y = 6$ বসিয়ে কী পাই দেখি, $2x + 3y = 2 \times (-1) + 3 \times 6 = 16$

$\therefore$ $\boxed{x = -1, y = 6}$ (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করছে অর্থাৎ $x = -1, y = 6$ (i) নং সমীকরণের একটি সমাধান।

আমি $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর P বিন্দু ব্যতীত অন্য যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিয়ে দেখছি (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করছে। [নিজে করি]

অর্থাৎ $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপরের প্রতিটি বিন্দুই (i) নং সমীকরণের সমাধান।

অর্থাৎ (i) নং সমীকরণের প্রতিটি সমাধানের জন্য $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর একটি বিন্দু পাবো; আবার $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপরের প্রতিটি বিন্দুর জন্য (i) নং সমীকরণের একটি সমাধান পাবো।

(i) নং সমীকরণের সাথে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সম্পর্ক কী?

$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

লেখচিত্র হলো একটি জ্যামিতিক চিত্র যার বীজগাণিতিক প্রকাশ হলো প্রদত্ত সমীকরণটি। অর্থাৎ লেখচিত্র হলো সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত চলরাশির মধ্যেকার সম্পর্কের চিত্ররূপ। এক বা দুই চলবিশিষ্ট কোনো সমীকরণের লেখচিত্র (দ্বিমাত্রিক) একটি সরলরেখা হবে। রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদা একটি সমতলে থাকে। এই সমতলটিকে কার্তেজীয় তল বলে।

সুতরাং, $ax + by + c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র একটি সরলরেখা।

গ্রাফ খাতা ও পেনসিলের সংখ্যার দাম কোনোটিই ঋণাত্মক হতে পারে না। কিন্তু সমীকরণটির লেখচিত্র যেহেতু একটি সরলরেখা। সুতরাং ঋণাত্মক স্থানাঙ্ক ওই সরলরেখার উপর থাকবে।

একটি এক বা দুই চলবিশিষ্ট একঘাত বা রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে কী কী করলাম দেখি—

(i) প্রথমে এক বা দুই চলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের কয়েকটি সমাধান বিন্দু (অন্তত পক্ষে তিনটি) বের করলাম।

(ii) তারপর ছক কাগজের উভয়অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের কটি বাহু একক ধরব ঠিক করে বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম এবং স্কেল দিয়ে তাদের যোগ করে যে সরলরেখা পেলাম সেটিই প্রদত্ত এক বা দুই চল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের লেখচিত্র।

[দুটি সমাধান বিন্দু যোগ করে সরলরেখা পাওয়া যায়। কিন্তু সতর্কতার জন্য তিনটি বিন্দু স্থাপন করে লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়]

4 জোসেফ পাড়ার ওই একই দোকান থেকে 33 টাকায় একই দামের 5টি গ্রাফ খাতা ও 4টি পেনসিল কিনেছে। 5টি গ্রাফ খাতা ও 4টি পেনসিলের মোট দাম 33 টাকা — এই গাণিতিক সমস্যাটিকে সমীকরণ আকারে লিখি।

ধরি, 1টি খাতার দাম x টাকা এবং 1টি পেনসিলের দাম y টাকা

$\therefore$ 5টি খাতার দাম 5x টাকা ও 4টি পেনসিলের দাম 4y টাকা

শর্তানুসারে, $5x + 4y = 33$ ———— (ii)

$\therefore$ একটি দুই চলবিশিষ্ট একঘাত বা রৈখিক সমীকরণ পেলাম।

আমি মারিয়ার আঁকা আগের ছক কাগজে (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র আঁকি।

সমীকরণটি

$5x + 4y = 33$

সমীকরণের তিনটি সমাধান হলো,

x	1	9	5
$y = \frac{33-5x}{4}$	7	-3	2

আমি মারিয়ার ছক কাগজে উভয় অক্ষ বরাবর প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে 1 একক ধরে (1,7), (9,– 3) এবং (5,2) বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম এবং বিন্দুগুলি যোগ করে $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা পেলাম।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা হলো (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

দেখছি, $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (☐, ☐)

$\therefore$ **x = 5, y = 2** (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের **একটি সাধারণ সমাধান** আছে।

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদুটিকে একসঙ্গে কী বলা হয়?

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় হলো দুইচল বিশিষ্ট রৈখিক বা একঘাত সহ-সমীকরণ।

বুঝেছি, এক্ষেত্রে দুটি অজ্ঞাত সংখ্যার একঘাত বিশিষ্ট দুই চলের সমীকরণদ্বয় হলো **সহ-সমীকরণ**।

5 আমার বোন মিতা ও আমার ভাই সোহমের 4 বছর পূর্বে বয়সের অনুপাত ছিল 1:2; 4 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত হবে 3:4 — এই বিবৃতিটির সহ-সমীকরণ গঠন করি এবং মিতা ও সোহমের বয়স নির্ণয় করি।

ধরি, মিতার বর্তমান বয়স x বছর এবং সোহমের বর্তমান বয়স y বছর।

$\therefore$ 4 বছর পূর্বে মিতার বয়স ছিল (x – 4) বছর এবং সোহমের বয়স ছিল (y – 4) বছর

শর্তানুসারে, $\frac{x-4}{y-4}=\frac{1}{2}$ ——————(i)

আবার, 4 বছর পরে মিতার বয়স হবে (x + 4) বছর এবং সোহমের বয়স হবে (y + 4) বছর

শর্তানুসারে, $\frac{x+4}{y+4}=\frac{3}{4}$ (ii) (i) নং ও (ii) নং হলো নির্ণেয় সহ-সমীকরণ।

আমি উপরের সহ-সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করার চেষ্টা করি।

$\frac{x-4}{y-4}=\frac{1}{2}$

বা, 2x – 8 = y – 4

বা, 2x = y + 4

$\therefore\ x=\frac{y+4}{2}$

$x=\frac{y+4}{2}$	2	3	☐
y	0	2	– 2

$\frac{x+4}{y+4}=\frac{3}{4}$

বা 4x + 16 = 3y + 12

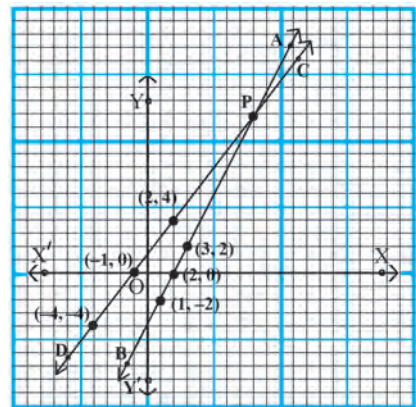
$\therefore\ x=\frac{3y-4}{4}$

$x=\frac{3y-4}{4}$	☐	2	– 4
y	0	☐	– 4

ছক কাগজে XOX$'$ ও YOY$'$ যথাক্রমে পরস্পর লম্ব x-অক্ষ ও y-অক্ষ টানলাম। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (2,0), (3,2) এবং (1, – 2) বিন্দুগুলি স্থাপন করে এবং যোগ করে উভয়দিকে বাড়িয়ে দিয়ে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা এবং (–1, 0), (2, 4)এবং (–4, –4) বিন্দুগুলি স্থাপন করে এবং যোগ করে $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা পেলাম।

$\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8 , 12)

সুতরাং, লেখচিত্র থেকে পেলাম, x = 8 এবং y = 12

$\therefore$ মিতার বর্তমান বয়স 8 বছর এবং সোহমের বর্তমান বয়স 12 বছর।

6 সুখদেব একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখেছে যাদের অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6 এবং সংখ্যাটির সঙ্গে 36 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। বিবৃতিটির সহ-সমীকরণ গঠন করি। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করি ও দুই অঙ্কের সংখ্যাটি লিখি।

ধরি, দুই অঙ্কের সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y

দ	এ
y	x

দ	এ
x	y

সুতরাং, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি $10y + x$

অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি $x + y$

শর্তানুসারে, $x + y = 6$.............(i)

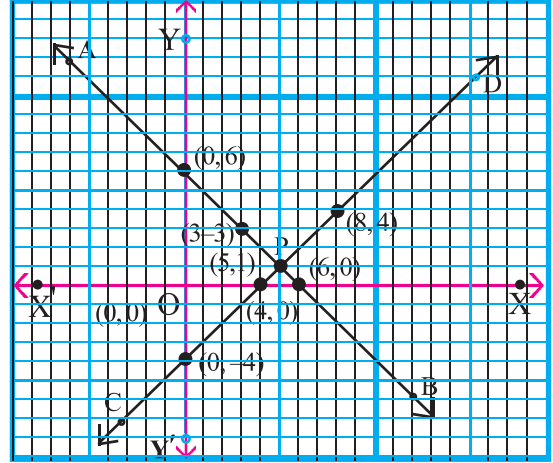
অঙ্কদ্বয় স্থানবিনিময় করলে পাই, $10x + y$

সুতরাং, $10y + x + 36 = 10x + y$

বা, $9y - 9x + 36 = 0$

$\therefore$ $y - x + 4 = 0$...................(ii)

x	6	0	3
$y = 6 - x$	0	6	3

x	0	4	8
$y = x - 4$	-4	0	4

(i) ও (ii) নং সমীকরণ দুটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে দেখছি, $x = 5$ এবং $y = 1$ [নিজে করি]

নির্ণেয় দুই অঙ্কের সংখ্যাটি $= 10 \times 1 + 5 = 15$

7 ছক কাগজে (2, 5), (5,2), (3,6), (5, 0), (3, 0), (–2, 0), (–2, –5), (0, 2), (0, 3), (0, –2) ইত্যাদি বিন্দুগুলি আমরা স্থাপন করে দেখি কী পাই। **[নিজে করি]**

দেখলাম কিছু বিন্দুর অবস্থান প্রথম পাদে, কিছু দ্বিতীয় পাদে, কিছু তৃতীয় পাদে, কিছু চতুর্থ পাদে এবং কিছু বিন্দুর অবস্থান x অক্ষের উপর, কিছু বিন্দুর অবস্থান y অক্ষের উপর। x-অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির একটি বিশেষ মিল রয়েছে। বিন্দুগুলির y স্থানাঙ্ক 0 (শূন্য)। অর্থাৎ বিন্দুগুলি থেকে x-অক্ষের দূরত্ব 0 একক।

8 আমি $x = 0$ — এই এক চল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের লেখচিত্র আঁকি ।

$x = 0$ সমীকরণটিকে লিখতে পারি, $x + 0.y = 0$

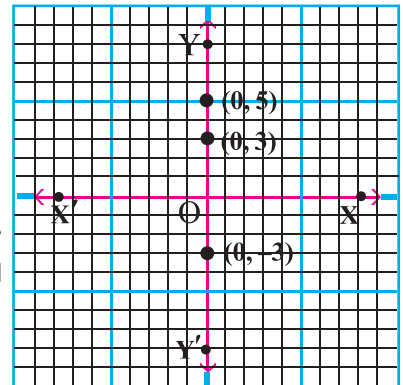
$\therefore$ y-এর যে কোনো মানের জন্য x-এর মান শূন্য হবে।

সুতরাং,

x	0	0	0
y	3	5	–3

$\therefore$ ছক কাগজে XOX' ও YOY' দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ টেনে (0,3), (0,5) ও (0, –3) বিন্দুগুলি স্থাপন করে ও যোগ করে ☐ অক্ষ পেলাম।

সুতরাং, y-অক্ষ হলো $x = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র।

একইভাবে $y = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষ **[নিজে করি]**

9 আমি $y + 7 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

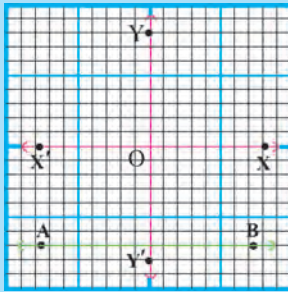
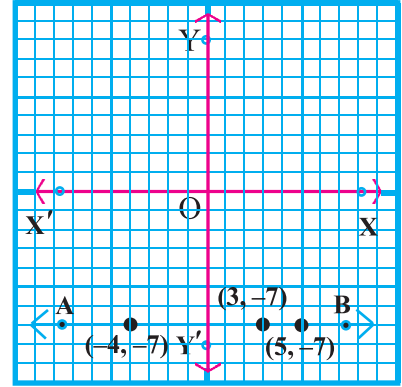
$y + 7 = 0$ সমীকরণটিকে লিখতে পারি, $0.x + y = -7$

$\therefore$ x-এর যেকোনো মানের জন্য y-এর মান -7 হবে।

সুতরাং $y + 7 = 0$ সমীকরণ থেকে পাই,

x	3	– 4	5
y	– 7	– 7	–7

ছক কাগজে XOX' এবং YOY' দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ টেনে উভয় অক্ষ বরাবর প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরে $(3, -7)$, $(-4, -7)$ ও $(5, -7)$ বিন্দুগুলি স্থাপন করে ও যোগ করে ☐ অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ পেলাম।

$\overleftrightarrow{AB}$ হলো $y + 7 = 0$ -একঘাত এক চল বিশিষ্ট সমীকরণের লেখচিত্র। [অর্থাৎ $y = b$ (যেখানে b একটি ধ্রুবক) সমীকরণটির লেখচিত্রটি x-অক্ষের সমান্তরাল।]

$y + 7 = 0 \therefore y = -7$

অর্থাৎ x অক্ষ থেকে 7 একক দূরে y অক্ষের ঋণাত্মক দিকে x অক্ষের সমান্তরাল $y = -7$ সমীকরণের লেখচিত্র $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা পেলাম।

10 একইভাবে দেখছি $x - 9 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র ☐ অক্ষের সমান্তরাল। [নিজে করি]
(অর্থাৎ $x = b$ (যেখানে b একটি ধ্রুবক) সমীকরণটির লেখচিত্রটি ☐ অক্ষের সমান্তরাল।)

11 আমি $7x + 6y = 42$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্র এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা লেখচিত্রের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

$7x + 6y = 42$ ....(i)

বা, $7x = 42 - 6y \quad \therefore \quad x = \frac{42 - 6y}{7}$

$x = \frac{42-6y}{7}$	6	☐	12
y	0	7	–7

$y = 0$ হলে, $x = \frac{42 - 6.0}{7} = \frac{42}{7} = 6$

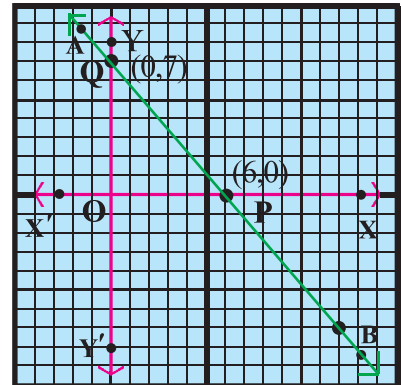
$y = 7$ হলে, $x = \frac{42 - 6.7}{7} =$ ☐

$y = -7$ হলে, $x = \frac{42 - 6.(-7)}{7} =$ ☐

ছক কাগজে XOX' এবং YOY' দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ অঙ্কন করে ও প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে 1 একক ধরে (6, 0), (0, 7) এবং (12, – 7) বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম এবং বিন্দুগুলি যোগ করে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা পেলাম।

দেখছি $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা x-অক্ষকে P বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

এখানে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6,0) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0,7)

$\therefore$ OP = 6 একক এবং OQ =7 একক

$\therefore \Delta$ OPQ -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times OP \times OQ$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 7$ বর্গ একক $= 21$ বর্গ একক $\therefore \Delta$ OPQ -এর ক্ষেত্রফল = 21 বর্গ একক

সমকোণী ত্রিভুজ OPQ-এ, $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$= (6^2 + 7^2)$ বর্গ একক

$= (36 + 49)$ বর্গ একক $= 85$ বর্গ একক

$\therefore \quad PQ = \sqrt{85}$ একক

```
       9. 2
    | 85.00
    |- 81
182 |  400
    |- 364
        36
```

অক্ষদ্বয় দ্বারা লেখচিত্রের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য 9.2 একক (প্রায়)

12 আমি $2x + 4y = 5$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$2x + 4y = 5$............(i)

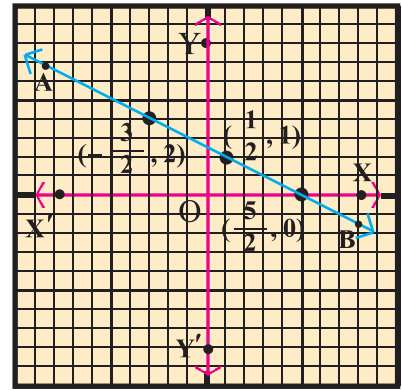
$2x + 4y = 5$

বা, $x = \frac{5 - 4y}{2}$

$x = \frac{5-4y}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	1	0	2

উভয়অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক

দেখছি উপরের ছক থেকে পাওয়া সকল বিন্দুর ভুজ অথবা কোটি একসঙ্গে পূর্ণসংখ্যা নয়। এই বিন্দুগুলি কীভাবে ছক কাগজে স্থাপন করব?

এক্ষেত্রে ছক কাগজে উভয়অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে এবং যোগ করে লেখচিত্র পাবো।

কিন্তু এই ধরনের সমীকরণ অর্থাৎ $ax + by = c$ [যেখানে a ও $b \neq 0$] a ও b-এর গ.সা.গু. দ্বারা c বিভাজ্য নয় এমন সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন নবম শ্রেণির পাঠ্যসূচির অন্তর্ভুক্ত নয়।

কষে দেখি— 3.2

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি ও কোথায় (অক্ষের উপর অথবা কোন পাদে) অবস্থিত লিখি।

(i) (3, 0) (ii) (0,8) (iii) (–5, 0) (iv) (0,–6) (v) (6,4) (vi) (–7, 4) (vii) (9,–9) (viii) (–4, –5)

2. ছক কাগজে XOX′ এবং YOY′ পরস্পর লম্ব অক্ষ টেনে যে কোনো 5 টি বিন্দু স্থাপন করি যারা তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

3. নীচের বক্তব্যগুলি রৈখিক সহসমীকরণ আকারে প্রকাশ করি :

(i) 3টি খাতা ও 2টি পেনের মোট দাম 55 টাকা এবং 4টি খাতা ও 3টি পেনের মোট দাম 75 টাকা।

(ii) দুটি সংখ্যার যোগফল 80 এবং ওই সংখ্যা দুটির বিয়োগফলের 3 গুণ বড়ো সংখ্যাটির থেকে 20 বেশি।

(iii) কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান হয় $\frac{7}{9}$ এবং ভগ্নাংশটির লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 3 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান হয় $\frac{1}{2}$

(iv) দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার দশকের অঙ্কটি এককের অঙ্কের দ্বিগুণ। অঙ্কদ্বয়কে উলটে লিখলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তা মূল সংখ্যাটি অপেক্ষা 27 কম।

4. নীচের বক্তব্যগুলি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ আকারে প্রকাশ করি ও সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(i) বর্তমানে সুজাতার পিতার বয়স সুজাতার বয়স অপেক্ষা 26 বছর বেশি। [ধরি, সুজাতার পিতার বয়স x বছর এবং সুজাতার বয়স y বছর]

(ii) দুটি সংখ্যার সমষ্টি 15

(iii) কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান $\frac{7}{9}$ হয়।

(iv) আমাদের আয়তাকার উঠানের পরিসীমা 80 মিটার।

(v) দুটি সংখ্যার বড়োটির 5 গুণ ছোটোটির 8 গুণের সমান।

5. নীচের সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(i) $x = 5$ (ii) $y + 2 = 0$ (iii) $x = 3 - 4y$ (iv) $3x - 7y = 21$ (v) $5x - 3y = 8$ (vi) $2x + 3y = 11$

(vii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0$ (viii) $6x - 7y = 12$ (ix) $x + y - 10 = 0$ (x) $y = 5x - 3$ (xi) $y=0$

6. নীচের বক্তব্যগুলি রৈখিক সহসমীকরণ আকারে প্রকাশ করি ও সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করে সমাধান করি।

(i) বর্তমানে রজতের মামা রজতের চেয়ে 16 বছরের বড়ো। 8 বছর পরে তার মামার বয়স তার বয়সের 2 গুণ হবে। বর্তমানে রজতের বয়স ও রজতের মামার বয়স লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

(ii) দুটি সংখ্যার সমষ্টি 15 এবং অন্তর 3; লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণগুলি সমাধান করে সংখ্যা দুটি লিখি।

(iii) একটি ভগ্নাংশের লব থেকে 3 বিয়োগ এবং হরের সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয় এবং লব থেকে 4 এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। বক্তব্যটির সমীকরণ গঠন করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে ভগ্নাংশটি লিখি।

(iv) রোহিতের আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 60 মিটার। বাগানের দৈর্ঘ্য 2 মিটার বেশি ও প্রস্থ 2 মিটার কম হলে, বাগানটির ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার কম হয়। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ লিখি।

(v) একটি নৌকা স্রোতের অনুকূলে 16 ঘণ্টায় 96 কিমি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে 8 ঘণ্টায় 16কিমি. যায়। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে, স্থির জলে নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগ লিখি।

সংকেত : ধরি, স্থির জলে নৌকার বেগ x কিমি./ঘণ্টা এবং স্রোতের বেগ y কিমি./ঘণ্টা। $\therefore$ স্রোতের অনুকূলে নৌকাটি 1ঘণ্টায় যায় $(x + y)$ কিমি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকাটি 1 ঘণ্টায় যায় $(x - y)$ কিমি.)

7. নীচের সহসমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি ও ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

(i) $x = 0$ এবং $2x + 3y = 15$ (ii) $y = 5$ এবং $2x + 3y = 11$

(iii) $x + y = 12$ এবং $x - y = 2$ (iv) $3x - 5y = 16$ এবং $2x - 9y = 5$

8. লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের সমীকরণগুলি সমাধান করি।

(i) $4x - y = 3; \quad 2x + 3y = 5$ (ii) $3x - y = 5; \quad 4x + 3y = 11$

(iii) $3x - 2y = 1; \; 2x - y = 3$ (iv) $2x + 3y = 12; \; 2x = 3y$

(v) $5x - 2y = 1; 3x + 5y = 13$

9. **লেখচিত্রের সাহায্যে প্রদত্ত সমীকরণ দুটির সমাধান নির্ণয় করি।**

$3x + 2y = 12$, $12 = 9x - 2y$

10. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমীকরণের লেখচিত্রটি অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করেছে তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

11. $x = 4$, $y = 3$ এবং $3x + 4y = 12$ সমীকরণ তিনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং লেখচিত্রগুলি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

12. $y = \frac{x+2}{3}$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। সেই লেখচিত্র থেকে $x = -2$-এর জন্য y -এর মান এবং x-এর কোন মানের জন্য y -এর মান 3 হবে, তা নির্ণয় করি।

13. **লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করি:** $\frac{3x-1}{2} = \frac{2x+6}{3}$

> **সংকেত :** $y = \frac{3x-1}{2}$ এবং $y = \frac{2x+6}{3}$ সমীকরণ দুটির লেখচিত্র অঙ্কন করে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। ছেদবিন্দুর x স্থানাঙ্কই হবে নির্ণেয় সমাধান।

14. **বহুমুখী বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):**

(i) $2x + 3 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রটি

(a) x-অক্ষের সমান্তরাল (b) y-অক্ষের সমান্তরাল
(c) কোনো অক্ষের সমান্তরাল নয় (d) মূলবিন্দুগামী

(ii) $ay + b = 0$ (a ও b ধ্রুবক এবং $a \neq 0, b \neq 0$) সমীকরণের লেখচিত্রটি

(a) x-অক্ষের সমান্তরাল (b) y-অক্ষের সমান্তরাল
(c) কোনো অক্ষের সমান্তরাল নয় (d) মূলবিন্দুগামী।

(iii) $2x + 3y = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রটি

(a) x-অক্ষের সমান্তরাল (b) y-অক্ষের সমান্তরাল
(c) মূলবিন্দুগামী (d) (2,0) বিন্দুগামী

(iv) $cx + d = 0$ (c ও d ধ্রুবক, $c \neq 0$) সমীকরণের লেখচিত্রটি y-অক্ষের সমীকরণ হবে যখন

(a) $d = -c$ (b) $d = c$ (c) $d = 0$ (d) $d = 1$

(v) $ay + b = 0$ (a ও b ধ্রুবক, $a \neq 0$) সমীকরণের লেখচিত্রটি x-অক্ষের সমীকরণ হবে যখন

(a) $b = a$ (b) $b = -a$ (c) $b = 2$ (d) $b = 0$

15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:**

(i) $2x + 3y = 12$ সমীকরণের লেখচিত্রটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক লিখি।

(ii) $2x - 3y = 12$ সমীকরণের লেখচিত্রটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক লিখি।

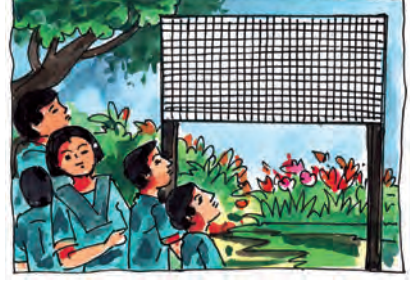
(iii) $3x + 4y = 12$ সমীকরণের লেখচিত্রটি ও অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

(iv) $(6, -8)$ বিন্দুটির x-অক্ষ থেকে দূরত্ব ও y-অক্ষ থেকে দূরত্ব কত তা লিখি।

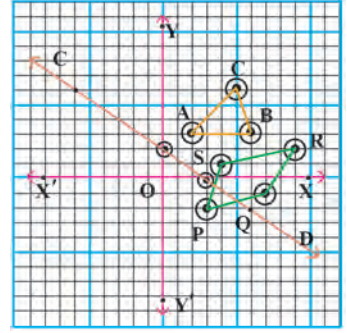
(v) $x = y$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান লিখি।

4 স্থানাঙ্ক জ্যামিতি: দূরত্ব নির্ণয়
(CO-ORDINATE GEOMETRY : DISTANCE FORMULA)

আমার বন্ধু অর্ক ও আয়েশা দুজনে একটি বড়ো পিচবোর্ডের গ্রাফ-বোর্ড তৈরি করেছে। আজ আমরা ঠিক করেছি আমাদের বাগানে ওই গ্রাফবোর্ডের সাহায্যে একটি মজার খেলা খেলব।

আমি খাতায় কিছু বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) লিখব। সুচেতা সেই বিন্দুগুলি গ্রাফ-বোর্ডে স্থাপন করবে এবং বিন্দুগুলি যোগ করে বিভিন্ন সামতলিক জ্যামিতিক চিত্র গঠন করবে।

আমি খাতায় লিখলাম — (2,3), (6,3) ও (5,6)

সুচেতা গ্রাফ-বোর্ডে A (2,3) B (6,3) এবং C (5,6) বিন্দুগুলি স্থাপন করে যোগ করল এবং কী জ্যামিতিক চিত্র পেল দেখি।

XOX' ও YOY' দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ টেনে উভয় অক্ষ বরাবর প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরে A, B ও C বিন্দুগুলি গ্রাফ-বোর্ডে স্থাপন করে যোগ করি। ABC একটি ☐ [চতুর্ভুজ/ত্রিভুজ] পেলাম।

1 এবার আমরা P (3, –2), Q (7, –1), R (9, 2), এবং S (4, 1) বিন্দুগুলি গ্রাফ-বোর্ডে স্থাপন করি এবং বিন্দুগুলি যোগ করে কী পাই দেখি।

উপরের গ্রাফ-বোর্ডে P,Q,R ও S বিন্দুগুলি স্থাপন করে যোগ করি। PQRS একটি ☐ [ত্রিভুজ / চতুর্ভুজ] পেলাম। পৃথা একই গ্রাফ-বোর্ডে দুই চল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ $2x+3y=6$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করল এবং একটি ☐ [সরলরেখা/বক্ররেখা] $\overleftrightarrow{CD}$ পেল। [নিজে অঙ্কন করি]

দেখছি, বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সেগুলি যোগ করে বিভিন্ন সামতলিক জ্যামিতিক চিত্র পাওয়া যায়। আবার বিভিন্ন বীজগাণিতিক দুই চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের জ্যামিতিক আকার সম্বন্ধে ঠিকমতো ধারণা করা যায়।

এইভাবে বীজগণিতের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক আকারের ধারণা গড়ে ওঠাকে কী বলা হয়?

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Co-ordinate Geometry) বলা হয়।

অর্থাৎ, স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির ধারণা করতে পারি। তাই, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ব্যাপকতরভাবে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় ব্যবহার করা হয়।

আমরা নবম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা ঠিক করেছি স্কুলে এবছরে বিজ্ঞান দিবস পালনের অনুষ্ঠান করব। অনুষ্ঠানে আমরা গণিতের কিছু মজার খেলা দেখাব। তাই আমরা সকল বন্ধুরা এবার সমীরণদের বাড়ি যাব। সমীরণদের বাড়ি আমার বাড়ির 6 কিমি. উত্তরে কিন্তু 4 কিমি. পূর্বে।

2 ছক কাগজ ছাড়াই ছবি এঁকে দেখি আমরা মোট কতটা দূরত্ব যাব?

ধরি, A বিন্দুতে আমার বাড়ি। 1 কিমি. -কে একক ধরে A বিন্দু থেকে 4 কিমি. পূর্বে এবং তারপর 6 কিমি. উত্তরে গিয়ে B বিন্দুতে পৌঁছালাম।

∴ B বিন্দুতে সমীরণের বাড়ি।

বুঝেছি, AC = 4 কিমি. এবং BC = 6 কিমি.

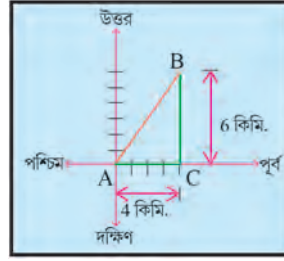
∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (4^2 + 6^2)$ বর্গ কিমি. = ☐ বর্গ কিমি.

$AB = \sqrt{52}$ কিমি. = 7.21 কিমি. (প্রায়)

```
        7.21
     52.0000
    -49
142 |  300
    | -284
1441 |  1600
     | -1441
        159
```

∴ আমাদের বাড়ি থেকে সমীরণের বাড়ির দূরত্ব 7.21 কিমি. (প্রায়)

3 আমি ছক কাগজ ছাড়াই XOX′ এবং YOY′ দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ এঁকে যে কোনো দুটি বিন্দুর [যাদের স্থানাঙ্ক প্রদত্ত] দূরত্ব মাপার চেষ্টা করি।

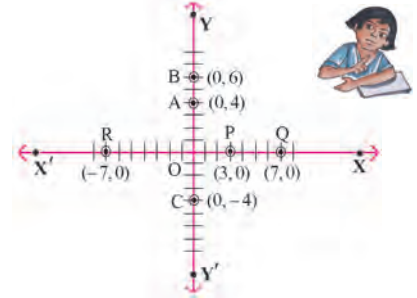
প্রথমে x- অক্ষের উপর যে কোনো দুটি বিন্দু P ও Q নিলাম।

ধরি, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 0) ও (7, 0)

আমি P ও Q বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব মাপি।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 0) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 0)।

∴ OP = 3 একক এবং OQ = 7 একক

∴ PQ = (7 – 3) একক = 4 একক।

4 আমি যদি R (– 7, 0) বিন্দু থেকে P (3, 0) বিন্দুর দূরত্ব মাপি তাহলে কী পাই দেখি।

OR = 7 একক

∴ ছবি থেকে পেলাম, PR = OP + OR = (3 + 7) একক = ☐ একক

5 আমি y-অক্ষের উপর যেকোনো দুটি বিন্দু A ও B নিলাম। A ও B বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব মাপি।

ধরি, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 4) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 6)

∴ A ও B বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব, AB = OB – OA = ☐ একক [নিজে করি]

6 আমি y-অক্ষের উপর অপর একটি বিন্দু C (0, – 4) নিলাম। এবার A ও C বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব মাপি।

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 4) এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, – 4)

∴ OA = 4 একক এবং OC = 4 একক

∴ ছবি থেকে পেলাম, AC = OA + OC = (4 + 4) একক = ☐ একক

∴ A ও C বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব ☐ একক।

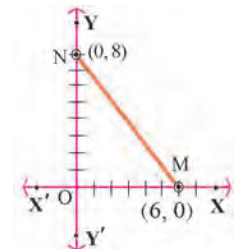
7 রোহিত x-অক্ষের উপর একটি বিন্দু M (6, 0) এবং y-অক্ষের উপর একটি বিন্দু N (0, 8) নিয়েছে। আমি MN সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য মাপি।

M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6, 0) এবং N বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 8)

∴ OM = ☐ একক এবং ON = ☐ একক।

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই,

$MN^2 = OM^2 + ON^2 = (6^2 + 8^2)$ বর্গ একক = ☐ বর্গ একক

∴ MN = ☐ একক

8 এবার আমি এমন দুটি বিন্দু A ও B নিলাম যারা কোনো অক্ষের উপর অবস্থিত নয়। এই A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য মাপার চেষ্টা করি।

ধরি, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 4) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 7)

A এবং B বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AM ও BN লম্ব টানলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করল। A বিন্দু থেকে BN-এর উপর AP লম্ব টানলাম।

সুতরাং, OM = 2 একক এবং ON = 5 একক

আবার, AM = 4 একক এবং BN = 7 একক

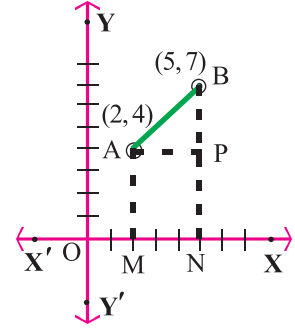
AP = MN = ON – OM (যেহেতু AMNP একটি আয়তাকার চিত্র) = (5 – 2) একক = $\square$ একক

আবার, BP = BN – PN = BN – AN = (7 – 4) একক = $\square$ একক

সমকোণী ত্রিভুজ APB-তে পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$AB^2 = AP^2 + PB^2$

$= (3^2 + 3^2)$ বর্গ একক = 18 বর্গ একক

$\therefore AB = \sqrt{18}$ একক $= 3\sqrt{2}$ একক

9 আমি ছবি এঁকে P (3, 6) ও Q (–2, – 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য কীভাবে পাবো দেখি।

P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 6) এবং (–2, – 4)

P ও Q বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথক্রমে দুটি লম্ব PA এবং QB অঙ্কন করলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করল।

OA = 3 একক এবং OB = 2 একক

PA = 6 একক এবং QB = 4 একক

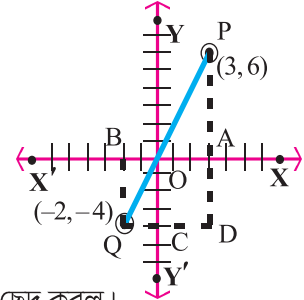
Q বিন্দু থেকে বর্ধিত PA-এর উপর লম্ব টানলাম যা বর্ধিত PA-কে D বিন্দুতে ছেদ করল।

QD = AB = OA + OB = (3 + 2) একক = $\square$ একক

আবার, PD = PA + AD = PA + QB = (6 + 4) একক = $\square$ একক

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ PQD-তে পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$PQ^2 = QD^2 + PD^2 = \square$ বর্গ একক

$\therefore$ PQ = $\square$ একক [নিজে লিখি]

নিজে করি— 4

আমি নীচের বিন্দুজোড়াগুলির সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি :

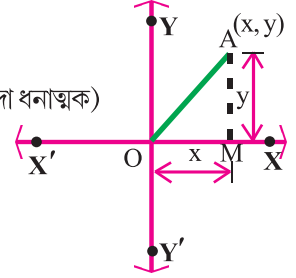
(i) (18, 0); (8, 0) (ii) (0, 15); (0, 4) (iii) (– 7, 0); (– 2, 0) (iv) (0, – 10); (0, – 3)
(v) (6, 0); (– 2, 0) (vi) (0, – 5); (0, 9) (vii) (5, 0); (0, 10) (viii) (3, 0); (0, 4)
(ix) (4, 3); (2, 1) (x) (– 2, – 2); (2, 2)

10 মূলবিন্দু ও A (x, y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করি।

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y); A বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর AM লম্ব টানি।

সুতরাং, $OM = x$ এবং $AM = y$

সমকোণী ত্রিভুজ OAM-তে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই,

$OA^2 = OM^2 + AM^2 = x^2 + y^2$ $\quad \therefore OA = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($\because$ দূরত্ব সর্বদা ধনাত্মক)

11 মূলবিন্দু থেকে (3, 4) বিন্দুর দূরত্ব হিসাব করি।

মূলবিন্দু থেকে (3, 4) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{3^2 + 4^2}$ একক

$= \sqrt{25}$ একক $= 5$ একক

12 $A (x_1, y_1)$ ও $B (x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করি

A ও B বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর দুটি লম্ব AM ও BN অঙ্কন করলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করল। A বিন্দু থেকে BN-এর উপর AP লম্ব অঙ্কন করলাম।

A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)

$\therefore$ $OM = x_1$ এবং $ON = x_2$

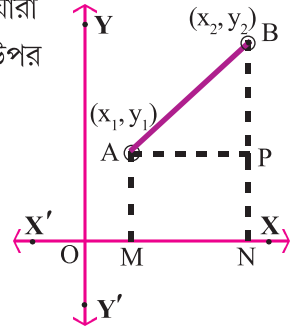
$AM = y_1$ এবং $BN = y_2$

$AP = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

এবং $BP = BN - PN = BN - AM = y_2 - y_1$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ APB-তে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$AB^2 = AP^2 + BP^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .... (i) ($\because$ AB সর্বদা ধনাত্মক)

পেলাম, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$\because (x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$
এবং
$(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$

(i) নং কে দূরত্বের সূত্র (Distance Formula) বলা হয়।

13 আমি (i) নং সূত্রের সাহায্যে (2, 4) ও (5, 7) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব যাচাই করি।

এখানে, $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ এবং $x_2 = 5$, $y_2 = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(2 - 5)^2 + (4 - 7)^2}$ একক

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$ একক $= \sqrt{18}$ একক $= 3\sqrt{2}$ একক

14 আমি A (6, 6), B (2, 3) এবং C (4, 7) বিন্দু তিনটি যোগ করি এবং বাহুভেদে কী প্রকার ত্রিভুজ পাই তা বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি

AB-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6 - 2)^2 + (6 - 3)^2}$ একক $= \sqrt{16 + 9}$ একক $= 5$ একক

BC-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 7)^2}$ একক $= \sqrt{20}$ একক $= 2\sqrt{5}$ একক

CA-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4 - 6)^2 + (7 - 6)^2}$ একক $= \sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।

কষে দেখি— 4

1. **মূলবিন্দু থেকে নীচের বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় করি :**
   (i) (7, – 24) (ii) (3, – 4) (iii) (a + b, a – b)

2. **নীচের বিন্দুযুগলগুলির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করি :**
   (i) (5, 7) এবং (8, 3) (ii) (7, 0) এবং (2, – 12) (iii) $(-\frac{3}{2}, 0)$ এবং (0, –2)
   (iv) (3, 6) এবং (– 2, – 6) (v) (1, – 3) এবং (8, 3) (vi) (5, 7) এবং (8, 3)

3. প্রমাণ করি যে, (– 2, – 11) বিন্দুটি (–3, 7) ও (4, 6) বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

4. হিসাব করে দেখাই যে (7, 9), (3, – 7) এবং (–3, 3) বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

5. **প্রমাণ করি যে, উভয়ক্ষেত্রে নীচের বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু :**
   (i) (1, 4), (4, 1) ও (8, 8) (ii) (– 2, – 2), (2, 2) ও (4, – 4)

6. প্রমাণ করি যে, A (3, 3), B (8, – 2) ও C (– 2, – 2) বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ΔABC-এর অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

7. হিসাব করে দেখাই যে, (2, 1), (0, 0), (– 1, 2) এবং (1, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গক্ষেত্রের চারটি কৌণিকবিন্দু।

8. হিসাব করে দেখি, y-এর মান কী হলে (2, y) এবং (10, –9) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 10 একক হবে।

9. x-অক্ষের উপর এমন একটি বিন্দু খুঁজি যা (3, 5) ও (1, 3) বিন্দু দুটি থেকে সমদূরবর্তী।

   সংকেত : x-এর অক্ষের উপর নির্ণেয় বিন্দুটি (x, 0)
   $(x - 3)^2 + (0 - 5)^2 = (x - 1)^2 + (0 - 3)^2$

10. O (0, 0), A (4, 3) এবং B (8, 6) বিন্দু তিনটি সমরেখ কিনা হিসাব করে লিখি।

    সংকেত : OA + AB = OB হলে সমরেখ হবে।

11. দেখাই যে, (2, 2), (–2, –2) এবং $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

12. দেখাই যে, (– 7, 12), (19, 18), (15, – 6) এবং (– 11, – 12) বিন্দুগুলি পরপর যোগ করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

13. দেখাই যে, (2, – 2), (8, 4), (5, 7) এবং (– 1, 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

14. দেখাই যে, (2, 5) , (5, 9), (9, 12) এবং (6, 8) বিন্দুগুলি পরস্পর যোগ করলে একটি রম্বস উৎপন্ন হয়।

15. **বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :**
    (i) (a + b, c –d) এবং (a – b, c + d) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব
    (a) $2\sqrt{a^2 + c^2}$ (b) $2\sqrt{b^2 + d^2}$ (c) $\sqrt{a^2 + c^2}$ (d) $\sqrt{b^2 + d^2}$

    (ii) (x, –7) এবং (3, –3) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 5 একক হলে, x-এর মানগুলি হলো
    (a) 0 অথবা 6 (b) 2 অথবা 3 (c) 5 অথবা 1 (d) –6 অথবা 0

(iii) যদি (x, 4) বিন্দুটির মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব 5 একক হয়, তাহলে x-এর মান

(a) ± 4 (b) ±5 (c) ± 3 (d) কোনোটিই নয়

(iv) (3, 0), (–3, 0) এবং (0, 3) বিন্দু তিনটি যোগ করে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয়, সেটি

(a) সমবাহু (b) সমদ্বিবাহু (c) বিষমবাহু (d) সমকোণী সমদ্বিবাহু

(v) একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0,0) এবং বৃত্তের উপরিস্থ একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4) হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 5 একক (b) 4 একক (c) 3 একক (d) কোনোটিই নয়

16. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(i) মূলবিন্দু থেকে (– 4, y) বিন্দুর দূরত্ব 5 একক হলে, y-এর মান কত লিখি।

(ii) y-অক্ষের উপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি যার থেকে (2,3) এবং (– 1, 2) বিন্দু দুটির দূরত্ব সমান।

(iii) x -অক্ষ এবং y -অক্ষের উপর দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি যাতে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং বিন্দু দুটির সংযোগকারী সরলরেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটি সমকোণী সমদ্বিবাহু হয়।

(iv) x-অক্ষের বিপরীত দিকে দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি যাদের দূরত্ব x-অক্ষ থেকে সমান।

(v) y-অক্ষের বিপরীত দিকে দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি যাদের দূরত্ব y-অক্ষ থেকে সমান।

5 রৈখিক সহসমীকরণ (দুই চল বিশিষ্ট)

(LINEAR SIMULTANEOUS EQUATIONS)

আমাদের গ্রামে একটি গ্রন্থাগার তৈরি হচ্ছে। গ্রামবাসীরা প্রত্যেকেই তাদের সাধ্যমতো অর্থ দিয়ে বা শ্রম দিয়ে সাহায্য করছেন। আমি ও আমার ভাই 140 টাকা জমিয়েছি। আমরা আমাদের জমানো সম্পূর্ণ টাকা গ্রন্থাগার তৈরিতে দান করলাম। ভাই গুনে দেখল আমাদের দেওয়া 140 টাকার মধ্যে শুধুমাত্র 10 টাকার ও 5 টাকার মোট 20টি নোট আছে।

1 হিসাব করে দেখি আমাদের দেওয়া 140 টাকার মধ্যে কতগুলি 10 টাকার নোট এবং কতগুলি 5 টাকার নোট আছে।

প্রথমে আমি সহসমীকরণ গঠন করি।

ধরি, 140 টাকার মধ্যে 10 টাকার নোট আছে x টি এবং 5 টাকার নোট আছে y টি।

সুতরাং, মোট নোটের সংখ্যা $(x + y)$ টি।

$\therefore$ মোট অর্থের পরিমাণ $(10x + 5y)$ টাকা।

শর্তানুসারে, $x + y = 20$ .... (i)

এবং $10x + 5y = 140$ .... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ দুটি হলো সহসমীকরণ।

দেখছি, দুটি দুই চলবিশিষ্ট একঘাত বা রৈখিক সমীকরণ পেলাম।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$x + y = 20$

$\therefore y = 20 - x$

x	0	20	10
$y = 20 - x$	20		

$10x + 5y = 140$

বা, $5y = 140 - 10x$

$\therefore y = \frac{140 - 10x}{5}$

x	0	14	4
$y = \frac{140 - 10x}{5}$	28		20

(i) নং সমীকরণ $x + y = 20$ -এর লেখচিত্র $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা এবং (ii) নং সমীকরণ $10x + 5y = 140$ -এর লেখচিত্র $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা পেলাম। দেখছি, $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8,12)

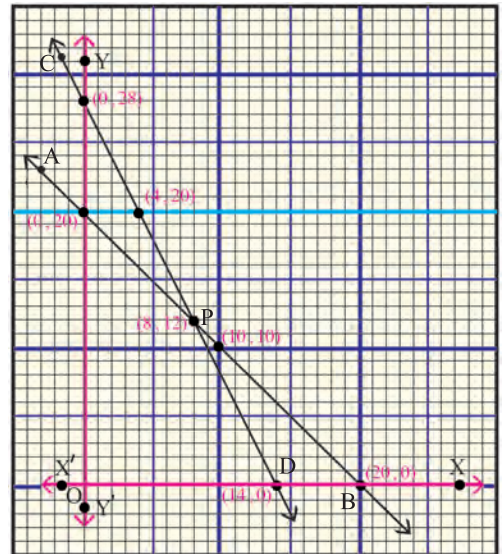
$\therefore$ লেখচিত্র থেকে পেলাম (i) নং ও (ii) নং দুইচলবিশিষ্ট একঘাত রৈখিক সমীকরণদুটির সাধারণ সমাধান

$x = 8$ এবং $y = 12$

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণে $x = 8$ ও $y = 12$ বসিয়ে যাচাই করি।

$x + y = 8 + 12 = 20$

$10x + 5y = 10 \times 8 + 5 \times 12$

$= 80 + 60 = \square$

$\therefore$ আমাদের দেওয়া 140 টাকার মধ্যে 8টি 10 টাকার নোট এবং 12টি 5 টাকার নোট ছিল।

এক্ষেত্রে আমরা (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদুটির একটি মাত্র সাধারণ সমাধান পেলাম।

2 আমার বন্ধু ইরফান 28 টাকায় 2টি আলপিনের প্যাকেট ও 3টি পেন কিনে গ্রন্থাগারে দিল। সোফিয়াও গ্রন্থাগারে 56 টাকায় একই মূল্যের 4টি আলপিনের প্যাকেট ও 6টি পেন কিনে দিল।

আমি সহসমীকরণ গঠন করে 1টি আলপিনের প্যাকেট ও 1টি পেনের মূল্য হিসাব করতে পারি কিনা দেখি।

ধরি, 1টি আলপিনের প্যাকেটের দাম x টাকা এবং 1টি পেনের দাম y টাকা।

∴ নির্ণেয় সহসমীকরণগুলি হলো, $2x + 3y = 28$ .... (iii)

$4x + 6y = 56$ ....(iv)

(iii) নং ও (iv) নং দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত বা রৈখিক সমীকরণ পেলাম। আমি ওই সমীকরণদুটির লেখচিত্র অঙ্কন করে ছেদবিন্দু খুঁজি ও সমাধান করি।

$2x + 3y = 28$

$\therefore y = \dfrac{28-2x}{3}$

x	14	2	5
$y = \dfrac{28-2x}{3}$			6

$4x + 6y = 56$

$\therefore y = \dfrac{56-4x}{6}$

x	14	8	–1
$y = \dfrac{56-4x}{6}$			10

দেখছি, (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণদুটির লেখচিত্র দুটি সরলরেখা, পরস্পর $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাতে সমাপতিত হয়েছে।

∴ $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর প্রতিটি বিন্দুই (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণের লেখচিত্রের উপর আছে।

অর্থাৎ, (2,8), (5,6), (8,4), (14,0), ... $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর প্রতিটি বিন্দুই (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণের লেখচিত্রের উপর আছে।

অর্থাৎ, $x=2, y=8$; $x=5, y=6$; $x=8, y=4$;
$x = 14, y=0$; ....সমীকরণদ্বয়ের সমাধান।

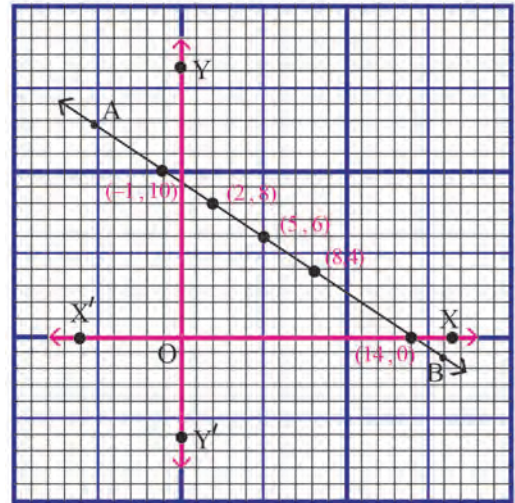
সুতরাং, প্রত্যেকটি স্থানাঙ্কই (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

আমি (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণে

$\boxed{x = 2, y = 8}$, $\boxed{x = 5, y = 6}$

বসিয়ে যাচাই করি।

$2x + 3y = 2 \times 2 + 3 \times 8 = 4 + 24 = 28$

$4x + 6y = 4{\times}2 + 6{\times}8 = 8 + 48 = \boxed{}$

বুঝেছি, 1টি আলপিনের প্যাকেটের দাম 2টাকা হলে 1টি পেনের দাম 8টাকা হবে। আবার 1 টি আলপিনের প্যাকেটের দাম 5 টাকা হলে 1টি পেনের দাম 6 টাকা হবে ইত্যাদি।

সুতরাং, এক্ষেত্রে আমরা (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণদুটির $\boxed{}$ (একটিমাত্র / অসংখ্য) সমাধান পেলাম।

অন্যভাবে কী পাই দেখি

$4x + 6y = 56$

বা, $2\,(2x + 3y) = 2 \times 28$

$\therefore 2x + 3y = 28$

(iv) নং সমীকরণ থেকে (iii) নং সমীকরণ পেলাম। অর্থাৎ দুটি সমীকরণই একই সমীকরণ।

3 ইরফান 28 টাকায় 2টি আলপিনের প্যাকেট ও 3টি পেন কিনেছিল। সুজাতাও একই দোকান থেকে একই দামের 2টি আলপিনের প্যাকেট ও 3টি পেন কিনল। কিন্তু সুজাতার কাছ থেকে 24 টাকা নিল।

এক্ষেত্রে সহসমীকরণ গঠন করে পাই —

$2x + 3y = 24$ .... (v)

(v) নং সমীকরণটিও একটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

আমি লেখচিত্রের সাহায্যে (iii) নং ও (v) নং সমীকরণের সমাধান করার চেষ্টা করি,

$2x + 3y = 28$ .... (iii)

বা, $y = \frac{28-2x}{3}$

x	14	2	5
$y = \frac{28-2x}{3}$	0	8	6

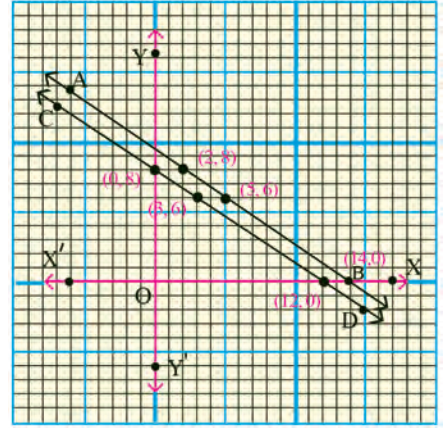
$2x + 3y = 24$ .... (v)

বা, $y = \frac{24-2x}{3}$

x	0	12	3
$y = \frac{24-2x}{3}$			6

(iii) নং ও (v) নং সমীরকণের লেখচিত্রে যথাক্রমে দুটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পেলাম যারা ☐ [পরস্পরছেদি/সমান্তরাল]

অর্থাৎ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার কোনো ছেদবিন্দু নেই। সুতরাং এমন কোনো বিন্দু নেই যা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ উভয় সরলরেখার উপরে আছে।

$\therefore$ (iii) নং ও (v) নং দুই চলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ দুটির কোনো সাধারণ সমাধান নেই। অর্থাৎ এক্ষেত্রে 1 টি আলপিনের প্যাকেট ও 1টি পেনের মূল্য হিসাব করে পেলাম না।

কষে দেখি— 5.1

নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে সহসমীকরণ গঠন করি এবং সমাধান করা যায় কিনা দেখি।

1. আমার দিদি ও আমার বাবার বর্তমান বয়সের সমষ্টি 55 বছর। হিসাব করে দেখছি 16 বছর পরে আমার বাবার বয়স আমার দিদির বয়সের দ্বিগুণ হবে।

(a) সহসমীকরণ গঠন করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।
(b) লেখচিত্রের সাহায্যে দেখি সহসমীকরণ দুটির সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় কিনা।
(c) লেখচিত্র থেকে আমার দিদি ও আমার বাবার বর্তমান বয়স লিখি।

2. মিতা যাদবকাকুর দোকান থেকে 42 টাকায় 3টি পেন ও 4টি পেনসিল কিনেছে। আমি বন্ধুদের দেওয়ার জন্য যাদবকাকুর দোকান থেকে একই মূল্যের 9টি পেন ও 1 ডজন পেনসিল 126 টাকায় কিনলাম।

(a) সহসমীকরণ গঠন করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।
(b) লেখচিত্রের সাহায্যে আরও দেখি যে সমীকরণ দুটির সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় কিনা।
(c) 1টি পেন ও 1টি পেনসিলের আলাদা আলাদা দাম কী হবে লেখচিত্র থেকে পাই কিনা লিখি।

3. আজ স্কুলে আমরা যেমন খুশি আঁকব। তাই আমি 2টি আর্ট পেপার ও 5টি স্কেচপেন 16 টাকায় কিনেছি। কিন্তু দোলা ওই একই দোকান থেকে একই মূল্যের 4টি আর্ট পেপার ও 10টি স্কেচ পেন 28 টাকায় কিনেছে।

(a) সহসমীকরণ গঠন করি ও লেখচিত্র আঁকি।
(b) লেখচিত্র থেকে সমীকরণদুটির সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় কিনা দেখি।
(c) 1টি আর্ট পেপার ও 1টি স্কেচ পেনের দাম পাই কিনা লিখি।

দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে সাধারণ সমাধান করার কী কী শর্ত পেলাম লিখি।
দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করার নিম্নলিখিত শর্তগুলি পেলাম —

(i) যখন দুটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তখন সমীকরণদুটির সমাধান করা যায় এবং একটি মাত্র সাধারণ সমাধান পাই।

(ii) যখন দুটি সরলরেখা সমাপতিত হয় অর্থাৎ একটি মাত্র সরলরেখাই হয় তখন সমীকরণদুটির অসংখ্য সাধারণ সমাধান পাই।

(iii) যখন দুটি সরলরেখা অসমাপতিত (সমাপতিত নয়) কিন্তু পরস্পর সমান্তরাল হয় তখন সমীকরণদুটির কোনো সাধারণ সমাধান পাই না।

কখন দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ সাধারণ সমাধানযোগ্য বলব?

(i) নং ও (ii) নং এর ক্ষেত্রে অর্থাৎ যখন দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ সমাধান করা যায় এবং তাদের একটিমাত্র অথবা অসংখ্য সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় তখন সমীকরণদুটিকে সাধারণ সমাধানযোগ্য বলা হয়। আবার (iii) নং এর ক্ষেত্রে অর্থাৎ যখন দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় না তখন তারা সাধারণ সমাধানযোগ্য নয় বলা হয়।

বুঝেছি, $\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{array}\right\} \longrightarrow$ সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং একটিমাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=28 \\ 4x+6y=56 \end{array}\right\} \longrightarrow$ সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে

$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=28 \\ 2x+3y=24 \end{array}\right\} \longrightarrow$ সাধারণ সমাধানযোগ্য নয়।

4 এই দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণদুটিকে $ax+by+c=0$ আকারে প্রকাশ করে একই চলের সহগগুলির এবং ধ্রুবকের অনুপাত বের করি এবং তাদের সম্পর্ক থেকে কী পাই দেখি।

$x+y=20$..............(i)

$10x+5y=140$................(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদুটি $ax+by+c=0$ আকারে প্রকাশ করি যেখানে a,b,c বাস্তব সংখ্যা।

[প্রথম সমীকরণের ক্ষেত্রে a_1, b_1, c_1 এবং দ্বিতীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে a_2, b_2, c_2 ব্যবহার করি]

$x+y=20$

$\therefore x+y-20=0$

বা, $1\times x+1\times y+(-20)=0$ —— (i)

$10x+5y=140$

বা, $10\times x+5\times y+(-140)=0$ —— (ii)

(i) নং $a_1x+b_1y+c_1=0$ সমীকরণ এবং (ii) নং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমীকরণের $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ এবং $\frac{c_1}{c_2}$ মানগুলির তুলনা করে পাই ।

$a_1 = \boxed{1}$, $b_1 = \boxed{1}$, $c_1 = \boxed{-20}$ $\quad a_2 = \boxed{}$, $b_2 = \boxed{}$, $c_2 = \boxed{}$

সুতরাং, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{10}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{5}$,

$\boxed{\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$

আমি যে সব দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণের লেখচিত্র এঁকেছি তাদের $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ মানগুলির তুলনা করি।

প্রথম সমীকরণের আকার $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, দ্বিতীয় সমীকরণের আকার $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

	দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	অনুপাতগুলির তুলনা	লেখচিত্র এঁকে পেলাম	বীজগাণিতিক সিদ্ধান্ত
1.	$x + y = 20$ $10x + 5y = 140$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-20}{-140}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	দুটি পরস্পরছেদি সরলরেখা	একটি মাত্র নির্দিষ্ট সাধারণ সমাধান পেলাম
2.	$2x + 3y = 28$ $4x + 6y = 56$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{28}{56}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	দুটি সমাপতিত সরলরেখা	অসংখ্য সাধারণ সমাধান পেলাম
3.	$2x + 3y = 28$ $2x + 3y = 24$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	দুটি পরস্পর অসমাপতিত সমান্তরাল সরলরেখা	কোনো সাধারণ সমাধান পেলাম না
4.	$4x + 3y = 20$ $\frac{3x}{4} - \frac{y}{8} = 1$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{a_1}{a_2} \square \frac{b_1}{b_2} \square \frac{c_1}{c_2}$		
5.	$2x - 3y = 8$ $6x - 9y = 24$						
6.	$3x + 4y = 12$ $3x + 4y = 24$						

4, 5, ও 6 নিজে লিখি।

5 আমি নীচের প্রতিক্ষেত্রে দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণদুটির লেখচিত্র না এঁকে শুধুমাত্র সহগগুলির অনুপাত দেখে সাধারণ সমাধানযোগ্য কিনা লিখি এবং পরে লেখচিত্র এঁকে যাচাই করি।

a) $4x + 5y = 9$, $8x + 10y = 86$
b) $x + y = 2$, $15x + 15y = 30$
c) $4x - y = 5$, $7x - 4y = 2$
d) $5x - 2y = -4$, $-11x + 7y = 1$
e) $x + 2y = 3$, $7x + 14y = 28$
f) $8x + 5y - 11 = 0$, $40x + 25y - 55 = 0$

a) $4x + 5y = 9$ ও $8x + 10y = 86$ — রৈখিক সহসমীকরণদুটিকে $ax + by + c = 0$ (a, b ও c বাস্তব সংখ্যা) আকারে প্রকাশ করে একই চলের সহগগুলির মধ্যে ও ধ্রুবকগুলির মধ্যে অনুপাতের সম্পর্ক দেখি এবং প্রতিজোড়া সমীকরণ সাধারণ সমাধানযোগ্য কিনা লিখি।

$4x + 5y - 9 = 0$ —— (i)

$8x + 10y - 86 = 0$ —— (ii)

$$\frac{4}{8} = \frac{5}{10} \neq \frac{-9}{-86}$$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধান যোগ্য নয়।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

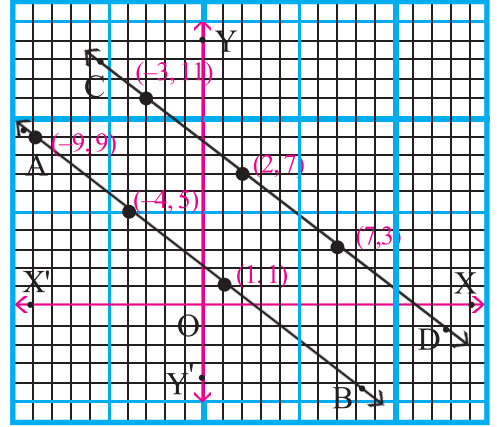
$4x + 5y = 9$ —— (i)

বা, $y = \frac{9-4x}{5}$

x	1	-4	-9
$y = \frac{9-4x}{5}$	☐	☐	9

$8x + 10y = 86$ —— (ii)

বা, $y = \frac{86-8x}{10}$

x	2	-3	7
$y = \frac{86-8x}{10}$	☐	☐	3

দেখছি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র যথাক্রমে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা।

∴ লেখচিত্র থেকে পেলাম,

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য নয়।

(b) $x + y - 2 = 0$ —— (i)

$15x + 15y - 30 = 0$ —— (ii)

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{15} = \frac{-2}{-30}$$

∴ উপরের সহগগুলির অনুপাত থেকে পাচ্ছি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সমাধানযোগ্য কিন্তু অসংখ্য সাধারণ সমাধান পাবো।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করি

$x + y = 2$

∴ $y = 2 - x$

x	0	5	−3
$y = 2 - x$	☐	☐	5

$15x + 15y = 30$

∴ $y = \frac{30-15x}{15}$

x	6	-4	8
$y = \frac{30-15x}{15}$	☐	6	☐

দেখছি, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্রের দুটি সরলরেখা সমাপতিত হয়ে একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ হয়েছে।

∴ লেখচিত্র থেকে পেলাম (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে।

(c) $4x - y - 5 = 0$ —— (i) $\qquad \frac{4}{7} \neq \frac{-1}{-4}$

$7x - 4y - 2 = 0$ —— (ii)

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং একটিমাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করি

$4x - y - 5 = 0$ —— (i)

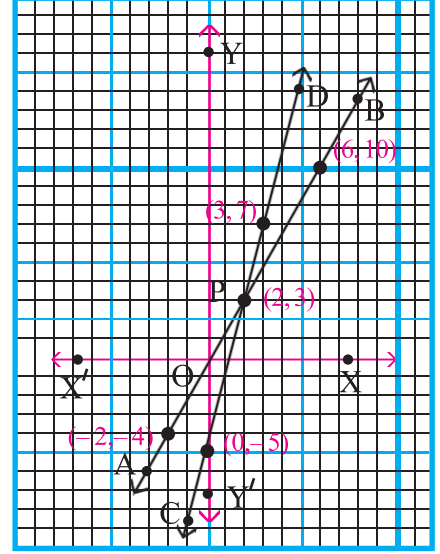
$\therefore x = \frac{y+5}{4}$

$x = \frac{y+5}{4}$			0
y	3	7	–5

$7x - 4y - 2 = 0$ —— (ii)

$\therefore x = \frac{4y+2}{7}$

$x = \frac{4y+2}{7}$		–2	
y	3	–4	10

লেখচিত্র থেকে দেখছি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং তারা একটিমাত্র বিন্দু P-তে ছেদ করেছে যার স্থানাঙ্ক (2,3)

$\therefore$ (i) নং ও (ii) সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সাধারণ সমাধান $x = 2$ এবং $y = 3$.

(d), (e), (f)-এর সাধারণ সমাধান যোগ্যতা দেখি ও নিজে যাচাই করি

6 আমি নীচের সহসমীকরণগুলির লেখচিত্র না এঁকে শুধুমাত্র একই চলের সহগগুলির মধ্যে এবং ধ্রুবকগুলির মধ্যে অনুপাত বের করি। এরপর তাদের সম্পর্ক দেখে সমীকরণগুলির লেখচিত্র সমান্তরাল, পরস্পরছেদি, না পরস্পর সমাপতিত হবে লিখি।

(a) $3x + 9y + 12 = 0$
$x + 3y + 4 = 0$

(b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$
$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 22$

(c) $4x + 3y = 20$
$16x + 12y = 10$

(a) $3x + 9y + 12 = 0$ —— (i)
$x + 3y + 4 = 0$ —— (ii)

$\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্রগুলি পরস্পর সমাপতিত হবে এবং একটি সরলরেখা হবে।

(c) -এর ক্ষেত্রে একইভাবে আমি নিজে করি।

(b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$ —— (i)
$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 22$ —— (ii)

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} \neq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং সহসমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্রদুটি পরস্পরছেদি সরলরেখা হবে।

7 p-এর কোন মানের জন্য $3x - 4y = 1$ এবং $9x + py = 2$ -এর একটিমাত্র সমাধান থাকবে, হিসাব করে লিখি।

$$3x - 4y = 1 \text{———} (i)$$
$$9x + py = 2 \text{———} (ii)$$

(i) নং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণ এবং (ii) নং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণের $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ মানগুলির তুলনা করে পাই ।

$$a_1 = 3, b_1 = -4 \text{ এবং } c_1 = -1$$
$$a_2 = 9, b_2 = p \text{ এবং } c_2 = -2$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের সমাধান থাকবে না যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

$\therefore \frac{3}{9} = \frac{-4}{p}$ বা, $3p = -36$ $\therefore p = -12$

$\therefore$ p-এর মান -12 বাদে সকল মানের জন্য (i) ও (ii) সমীকরণের একটিমাত্র সমাধান থাকবে।

8 r -এর যে মানের জন্য $rx + 2y = 5$ এবং $(r + 1)x + 3y = 2$ সমীকরণগুলির কোনো সমাধান পাওয়া যাবে না হিসাব করে লিখি।

$$rx + 2y = 5 \text{———} (i)$$
$$(r + 1)x + 3y = 2 \text{———} (ii)$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের কোনো সমাধান থাকবে না যদি $\frac{r}{r+1} = \frac{2}{3}$ হয় বা, $3r = 2r + 2$ $\therefore r = 2$

$\therefore r = 2$ হলে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের কোনো সমাধান থাকবে না।

9 p -এর কোন মানের জন্য $px + 6y - p = 0$ এবং $(p - 1)x + 4y + (p - 5) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একাধিক সমাধান থাকবে, হিসাব করে লিখি।

$$px + 6y - p = 0 \text{———} (i)$$
$$(p - 1)x + 4y + (p - 5) = 0 \text{———} (ii)$$

(i) নং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণ এবং (ii) নং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণের $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ মানগুলির তুলনা করে পাই ।

এখানে, $a_1 = p, b_1 = 6, c_1 = -p$ এবং $a_2 = p - 1, b_2 = 4,$ ও $c_2 = p - 1$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের একাধিক সমাধান থাকবে, যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

সুতরাং, $\frac{p}{p-1} = \frac{6}{4} = \frac{-p}{p-5}$

$\therefore \frac{p}{p-1} = \frac{3}{2}$

বা, $3p - 3 = 2p$

$\therefore p = 3$

আবার, $\frac{3}{2} = \frac{-p}{p-5}$

বা, $3p - 15 = -2p$

বা, $5p = 15$

$\therefore p = 3$

দেখছি, $p = 3$ হলে, (i) ও (ii) নং সমীকরণের অসংখ্য সমাধান পাবো।

10 তীর্থ একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ $2x + y = 6$ লিখেছে। আমি আর একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লিখি যাতে দুটি সমীকরণের লেখচিত্র (a) সমান্তরাল হয় (b) পরস্পরচ্ছেদি হয় (c) পরস্পর সমাপতিত হয়।

(a) $2x + y = 6$ —— (i)

(i) নং সমীকরণের লেখচিত্রের সমান্তরাল একটি সরলরেখার সমীকরণ

$4x + 2y = 10$ [যেহেতু $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{10}$]

(b) $2x + y = 6$ সমীকরণের লেখচিত্রের সঙ্গে পরস্পরছেদি অপর একটি সরলরেখার সমীকরণ,

$3x + 2y = 6$ [যেহেতু $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$]

(c) $2x + y = 6$ সমীকরণের লেখচিত্রের সঙ্গে সমাপতিত হবে অপর একটি সরলরেখার সমীকরণ,

$12x + 6y = 36$ [যেহেতু $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$]

কষে দেখি - 5.2

1. নীচের সহসমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করে সমাধানযোগ্য কিনা লিখি ও সমাধানযোগ্য হলে সমাধানটি বা অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে 3টি সমাধান লিখি।

(a) $2x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$ (b) $4x - y = 11$, $-8x + 2y = -22$ (c) $7x + 3y = 42$, $21x + 9y = 42$ (d) $5x + y = 13$, $5x + 5y = 12$

2. নীচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলির একই চলের সহগগুলির ও ধ্রুবকগুলির অনুপাতের সম্পর্ক নির্ণয় করে সমীকরণ দুটি সমাধানযোগ্য কিনা লিখি ও সমীকরণগুলির লেখচিত্র এঁকে যাচাই করি।

(a) $x + 5y = 7$, $x + 5y = 20$ (b) $2x + y = 8$, $2y - 3x = -5$ (c) $5x + 8y = 14$, $15x + 24y = 42$ (d) $3x + 2y = 6$, $12x + 8y = 24$

3. নীচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলি একই চলের সহগগুলির ও ধ্রুবকগুলির অনুপাতের সম্পর্ক নির্ণয় করে সমীকরণগুলির লেখচিত্রগুলি সমান্তরাল বা পরস্পরচ্ছেদি বা সমাপতিত হবে কিনা লিখি।

a) $5x + 3y = 11$, $2x - 7y = -12$ (b) $6x - 8y = 2$, $3x - 4y = 1$ (c) $8x - 7y = 0$, $8x - 7y = 56$ (d) $4x - 3y = 6$, $4y - 5x = -7$

4. নীচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলির মধ্যে যেগুলি সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করি এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে 3টি সমাধান লিখি।

a) $4x + 3y = 20$, $8x + 6y = 40$ (b) $4x + 3y = 20$, $12x + 9y = 20$ (c) $4x + 3y = 20$, $\frac{3x}{4} - \frac{y}{8} = 1$

d) $p - q = 3$, $\frac{p}{3} + \frac{q}{2} = 6$ (e) $p - q = 3$, $\frac{p}{5} - \frac{q}{5} = 3$ (f) $p - q = 3$, $8p - 8q = 5$

5. তথাগত একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ $x + y = 5$ লিখেছে। আমি আর একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লিখি যাতে দুটি সমীকরণের লেখচিত্র

(a) পরস্পর সমান্তরাল হবে। (b) পরস্পরছেদি হবে। (c) পরস্পর সমাপতিত হবে।

প্রতি বছর আষাঢ় মাসে আমাদের স্কুলের সামনের মাঠে মেলা বসে। তিনদিন ধরে এই মেলা চলে। এবছর আমরা কিছু বন্ধুরা মিলে স্কুল ছুটির পরে মেলায় গিয়ে অনেক চারা গাছ কিনলাম।

11 সায়ন 42 টাকায় 6 টি বেলফুলের চারা কিনল। 1 টি বেলফুলের চারার দাম হিসাব করি।

ধরি, 1 টি বেলফুলের চারার দাম x টাকা

শর্তানুসারে, $6x = 42$ —— (i)

$\therefore x = \square$

সুতরাং, 1 টি বেলফুলের চারার দাম 7 টাকা।

(i) নং সমীকরণটি একচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

12 আমি 19 টাকায় 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারা এবং 2 টি গাঁদাফুলের চারা কিনলাম। কিন্তু বুলু 24 টাকায় একই দামের 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারা এবং 3 টি গাঁদাফুলের চারা কিনল। আমি সহসমীকরণ গঠন করে 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারা এবং 1 টি গাঁদাফুলের চারার দাম হিসাব করে লিখি।

ধরি, 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারার দাম x টাকা এবং

1 টি গাঁদাফুলের চারার দাম y টাকা

সহসমীকরণগুলি হল, $x + 2y = 19$ —— (ii)

$x + 3y = 24$ —— (iii)

দেখছি, (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণগুলি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

(i) নং একচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণটি খুব সহজেই সমাধান করতে পারি। কিন্তু (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন না করে কীভাবে সহজে সমাধান করব?

(ii) নং — (iii) নং করে পাই,

$(x + 2y) - (x + 3y) = 19 - 24$

বা, $x + 2y - x - 3y = -5$

বা, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

অন্যভাবে,

$$\begin{array}{r} x + 2y = 19 \\ x + 3y = 24 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline -y = -5 \end{array}$$

বিয়োগ করে পাই, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x + 2y = 19$

বা, $x + 2 \times 5 = 19$

বা, $x = 19 - 10 = 9$

$\therefore x = 9$

নির্ণেয় সমাধান, $x = 9$

$y = 5$

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করে দেখছি $x = 9$ এবং $y = 5$ [নিজে করি]

∴ 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারার দাম 9 টাকা এবং 1 টি গাঁদা ফুলের চারার দাম 5 টাকা।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণে $x = 9$ ও $y = 5$ বসিয়ে দেখছি,
$9 + 2 \times 5 = 19$ এবং $9 + 3 \times 5 = \square$
$x = 9$ ও $y = 5$ মানগুলি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের একটি চল অপনয়ন করে অন্য একটি চলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণে পরিণত করে সমাধান করার পদ্ধতির নাম কী হবে?

দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণকে সমাধান করার এই পদ্ধতিকে **অপনয়ন পদ্ধতি** (Method of Elimination) বলা হয়।

13 আমি $3x + 4y = 17$ এবং $4x - 3y = 6$—এই সমীকরণ দুটিকে অপনয়ন পধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

$3x + 4y = 17$ —— (i)
$4x - 3y = 6$ —— (ii)

প্রথমে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ থেকে x চলটি অপনয়ন করি।

∴ (i) নং × 4 – (ii) নং × 3 করে পাই,

$$12x + 16y = 68$$
$$\underset{-}{12x} \underset{+}{- 9y} = \underset{-}{18}$$

বিয়োগ করে পাই, $25y = 50$

∴ $y = 2$

(i) নং থেকে পাই, $3x + 4 \times 2 = 17$

বা, $3x = 17 - 8 = 9$

∴ $x = \square$

∴ অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের সমাধান পেলাম $x = 3$ ও $y = 2$.

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করে সমাধান করে পেলাম, $x = 3$ ও $y = 2$ [নিজে করি]

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণে $x = 3$ ও $y = 2$ বসিয়ে পাচ্ছি,

$3 \times 3 + 4 \times 2 = \square$ এবং $4 \times 3 - 3 \times 2 = \square$

∴ $x = 3$ এবং $y = 2$ (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

14 আমি নীচের দুইচলবিশিষ্ট সমীকরণগুলি **অপনয়ন পদ্ধতিতে** সমাধান করি এবং সমাধানে পাওয়া চলগুলির মান সমীকরণকে সিদ্ধ করছে কিনা যাচাই করি।

(a) $3x - \frac{2}{y} = 5$
$x + \frac{4}{y} = 4$

(b) $(2x + 3y - 5)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$

(c) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$
$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

(d) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(a) $3x - \frac{2}{y} = 5$ ——— (i)
$x + \frac{4}{y} = 4$ ——— (ii)

y চলটি অপনয়ন করার জন্য (i) নং সমীকরণকে 2 দিয়ে ও (ii) নং সমীকরণকে 1 দিয়ে গুণ করি।

$6x - \frac{4}{y} = 10$
$x + \frac{4}{y} = 4$

যোগ করে পাই, $7x = 14$
$\therefore x = \square$

(i) নং সমীকরণে x = 2 বসিয়ে পাই,

$3 \times 2 - \frac{2}{y} = 5$

বা, $-\frac{2}{y} = 5 - 6 = -1$

বা, $\frac{2}{y} = 1$

$\therefore y = 2$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2$
$y = 2$

$3x - \frac{2}{y}$	$x + \frac{4}{y}$
$= 3 \times 2 - \frac{2}{2}$	$= 2 + \frac{4}{2}$
$= \square$	$= \square$

$\therefore$ x =2 ও y = 2 (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(b) $(2x + 3y - 5)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$

যেকোনো বাস্তব সংখ্যামালার বর্গ সর্বদা ধনাত্মক। দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যামালার বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে, তারা পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং, $2x + 3y - 5 = 0$ ——— (i)
$3x + 2y - 5 = 0$ ——— (ii)

(i) নং × 3 – (ii) নং × 2 করে পাই,

$6x + 9y - 15 = 0$
$6x + 4y - 10 = 0$
$-\quad -\quad +$

বিয়োগ করে পাই, $5y - 5 = 0$

বা, $5y = 5 \therefore y = 1$

y-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2x + 3 \times 1 - 5 = 0$

বা, $2x = 2 \therefore x = 1$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, x = 1, y = 1

(c) $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1$

বা, $2\times(\frac{1}{x})+5\times(\frac{1}{y})=1$

ধরি, $\frac{1}{x}=p$ এবং $\frac{1}{y}=q$

$\therefore\ x=\frac{1}{p}$ এবং $y=\frac{1}{q}$

সুতরাং, $2p+5q=1$ ——— (i)

আবার, $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$

বা $3\times(\frac{1}{x})+2\times(\frac{1}{y})=\frac{19}{20}$

$\therefore\ 3p+2q=\frac{19}{20}$ ——— (ii)

p চলটি অপনয়ন করার জন্য $3\times$ (i) নং $-2\times$ (ii) নং করে পাই,

$6p+15q=3$

$6p+4q=\frac{19}{10}$

$-\quad -\quad -$

$11q=3-\frac{19}{10}=\frac{11}{10}$

$\therefore\ q=\frac{1}{10}$

(i) নং সমীকরণে $q=\frac{1}{10}$ বসিয়ে পাই,

$2p+5q=1$

$\therefore\ 2\times p+5\times\frac{1}{10}=1$

বা,$2p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ p=\frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ এবং $y=\frac{1}{q}=10$

যাচাই করি,

> $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{2}{4}+\frac{5}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
>
> $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}+\frac{2}{10}=\square$
>
> $\therefore\ x=4, y=10$ (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(d) $ax+by=c$ ——— (i)

$bx+ay=1+c$ ——— (ii)

(i) নং $\times$ b $-$ (ii) নং $\times$ a করে পাই,

$abx+b^2y=bc$

$abx+a^2y=a+ac$

$-\quad -\quad -\quad -$

বিয়োগ করে পাই, $b^2y-a^2y=bc-a-ac$

বা, $y(b^2-a^2)=bc-ac-a$

$\therefore\ y=\frac{bc-ac-a}{b^2-a^2}$

(i) নং সমীকরণে y-এর মান বসিয়ে পাই,

$ax+\frac{b^2c-abc-ab}{b^2-a^2}=c$

বা, $ax=c-\frac{b^2c-abc-ab}{b^2-a^2}$

বা, $ax=\frac{b^2c-a^2c-b^2c+abc+ab}{b^2-a^2}$

বা, $x=\frac{a(bc-ac+b)}{a(b^2-a^2)}$

$\therefore\ x=\frac{bc-ac+b}{b^2-a^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{bc-ac+b}{b^2-a^2}$

$y=\frac{bc-ac-a}{b^2-a^2}$

কষে দেখি - 5.3

1. নীচের দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণগুলি **অপনয়ন পদ্ধতিতে** সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি :

   (a) $8x + 5y - 11 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$ (b) $2x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$

2. $7x - 5y + 2 = 0$ সমীকরণকে কত দিয়ে গুণ করে $2x + 15y + 3 = 0$ সমীকরণের সঙ্গে যোগ করব যাতে y চলটিকে অপনীত করতে পারি।

3. $4x - 3y = 16$ ও $6x + 5y = 62$ উভয় সমীকরণকে সবথেকে ছোটো কোন কোন স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে দুটি সমীকরণের x-এর সহগ সমান হবে তা লিখি।

4. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি **অপনয়ন পদ্ধতিতে** সমাধান করি।

(i) $3x + 2y = 6$, $2x - 3y = 17$ (ii) $2x + 3y = 32$, $11y - 9x = 3$ (iii) $x + y = 48$, $x + 4 = \frac{5}{2}(y + 4)$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$, $\frac{5x}{4} - 3y = -3$ (v) $3x - \frac{2}{y} = 5$, $x + \frac{4}{y} = 4$ (vi) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

(vii) $\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$, $\frac{x}{14} + \frac{y}{18} = 1$ (viii) $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$, $\frac{xy}{x-y} = \frac{1}{9}$ (ix) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 3$, $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 5$

(x) $\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$, $\frac{21}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2$ (xi) $\frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{4} = \frac{7}{20}$, $\frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{2} + \frac{5}{6} = 0$ (xii) $x + y = a + b$, $ax - by = a^2 - b^2$

(xiii) $\frac{x+a}{a} = \frac{y+b}{b}$, $ax - by = a^2 - b^2$ (xiv) $ax + by = c$, $a^2x + b^2y = c^2$ (xv) $ax + by = 1$, $bx + ay = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - 1$

(xvi) $(7x - y - 6)^2 + (14x + 2y - 16)^2 = 0$

15 সুমিতা বোর্ডে $x + 2y = 19$ ও $x + 3y = 24$ সমীকরণ দুটি লিখল।

$x + 2y = 19$ ———— (i)

$x + 3y = 24$ ———— (ii)

আমি একটি চলকে অন্য চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি ও কী পাই দেখি।

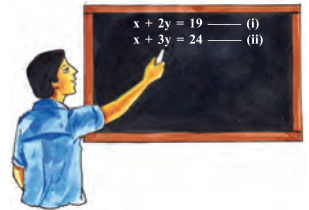
$x + 2y = 19$ আবার $x + 3y = 24$

$x = 19 - 2y$ —— (iii) $x = 24 - 3y$ —— (iv)

দেখছি (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণের বামদিক সমান।

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ দুটি তুলনা করে কী পাই দেখি।

$19 - 2y = 24 - 3y$

বা, $-2y + 3y = 24 - 19$ $\therefore y = 5$

(iii) নং সমীকরণে $y = 5$ বসিয়ে পাই, $x = 19 - 2 \times 5 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 9, y = 5$

এইভাবে দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণকে একটি চলের মাধ্যমে প্রকাশ করে ও তুলনা করে সমাধান করার পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

সমাধানের এই পদ্ধতিকে তুলনামূলক পদ্ধতি (Method of Comparison) বলা হয়।

16 $4x - 3y = 16$ ও $6x + 5y = 62$ সমীকরণদ্বয় তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

$4x - 3y = 16$ ——— (i)
বা, $4x = 16 + 3y$
$\therefore x = \frac{16 + 3y}{4}$ ——— (iii)

$6x + 5y = 62$ ——— (ii)
বা, $6x = 62 - 5y$
$\therefore x = \frac{\square}{\square}$ ——— (iv)

আমি (iii) ও (iv) সমীকরণদ্বয় তুলনা করে পাই,

$$\frac{16 + 3y}{4} = \frac{62 - 5y}{6}$$

বা, $96 + 18y = 248 - 20y$

বা, $38y = 248 - 96 = \square$ $\quad \therefore y = \square$

(iii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = \frac{16 + 3y}{4} = \frac{16 + 3 \times 4}{4} = 7$

তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করে পেলাম, $x = 7$ এবং $y = 4$

আমি লেখচিত্রের সাহায্যে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পেলাম $x = 7$ ও $y = 4$ [নিজে করি]

কষে দেখি - 5.4

1. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8$ সমীকরণের x-কে y চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি।

2. $\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 1$ সমীকরণের y-কে x চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি।

3. নীচের সহসমীকরণগুলি **তুলনামূলক পদ্ধতিতে** সমাধান করি এবং সমাধানের মানগুলি সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি।

(a) $2(x - y) = 3$
$5x + 8y = 14$

(b) $2x + \frac{3}{y} = 5$
$5x - \frac{2}{y} = 3$

(c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

(d) $4x - 3y = 18$
$4y - 5x = -7$

4. $2x + y = 8$ ও $2y - 3x = -5$ সহসমীকরণগুলি তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

5. **নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করি :**

(i) $3x - 2y = 2$
$7x + 3y = 43$

(ii) $2x - 3y = 8$
$\frac{x + y}{x - y} = \frac{7}{3}$

(iii) $\frac{1}{3}(x - y) = \frac{1}{4}(y - 1)$
$\frac{1}{7}(4x - 5y) = x - 7$

(iv) $\frac{x + 1}{y + 1} = \frac{4}{5}$
$\frac{x - 5}{y - 5} = \frac{1}{2}$

(v) $x + y = 11$
$y + 2 = \frac{1}{8}(10y + x)$

(vi) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$2x + 4y = 11$

(vii) $x + \frac{2}{y} = 7$
$2x - \frac{6}{y} = 9$

(viii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

(ix) $\frac{x+y}{xy} = 2$
$\frac{x-y}{xy} = 1$

(x) $\frac{x+y}{5} + \frac{x-y}{4} = 5$
$\frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{5} = 5\frac{4}{5}$

(xi) $\frac{4}{x} - \frac{y}{2} = -1$
$\frac{8}{x} + 2y = 10$

(xii) $2 - 2(3x - y) = 10(4 - y) - 5x$
$= 4(y - x)$

17 সিরাজ সুমিতার বোর্ডে লেখা দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণগুলি অন্যভাবে সমাধান করার চেষ্টা করছে।

$x + 2y = 19$ —— (i), $x + 3y = 24$ —— (ii)

আমি যদি (i) নং সমীকরণ থেকে x চলকে y চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি এবং (ii) নং সমীকরণে x-এর পরিবর্তে সেটি বসাই তাহলে কী পাই দেখি।

$x + 2y = 19$

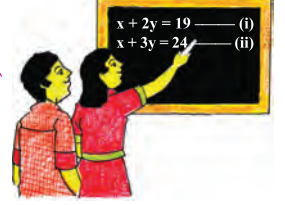
$\therefore\ x = 19 - 2y$ ——— (iii)

(ii) নং সমীকরণে $x = 19 - 2y$ বসিয়ে পাই,

$x + 3y = 24$
বা, $19 - 2y + 3y = 24$
বা, $19 + y = 24$
বা, $y = 24 - 19$ $\therefore y = 5$

(iii) নং সমীকরণে $y = 5$ বসিয়ে পাই,

$x = 19 - 2y$
বা, $x = 19 - 2 \times 5$
$\therefore\ x = \square$

এই পদ্ধতিতে সমাধান করে পেলাম $x = 9$ এবং $y = 5$

এইভাবে একটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের একটি চলকে অপর চলের মাধ্যমে প্রকাশ করে অন্য দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণে ওই চলের পরিবর্তে বসিয়ে সমাধান করার পদ্ধতির নাম কী?

এই পদ্ধতির নাম পরিবর্ত পদ্ধতি (Method of Substitution)।

18 আমি **পরিবর্ত পদ্ধতিতে** পাশের দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণগুলি সমাধান করি এবং সমাধানের মানগুলি সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি।

(a) $5x+3y=11$
$2x-7y=-12$

(b) $2x + \frac{3}{y} = 5$
$5x - \frac{2}{y} = 3$

(a) $5x + 3y = 11$ —— (i), $2x - 7y = -12$ —— (ii)

বা, $3y = 11 - 5x$

$\therefore\ y = \frac{11 - 5x}{3}$ ———— (iii)

(ii) নং সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $\frac{11 - 5x}{3}$ বসিয়ে পাই,

$2x - 7 \times \left(\frac{11 - 5x}{3}\right) = -12$

বা, $2x - \frac{77 - 35x}{3} = -12$

বা, $\frac{6x - 77 + 35x}{3} = -12$

বা, $41x - 77 = -36$

বা, $41x = 41$ $\therefore\ x = \square$

(iii) নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$y = \frac{11 - 5 \times 1}{3}$

$\therefore\ y = \square$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 1, y = 2$

যাচাই করি, $5 \times 1 + 3 \times 2 = \square$ এবং $2 \times 1 - 7 \times 2 = \square$

$\therefore\ x = 1$ ও $y = 2$ মান (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(b) $2x + \frac{3}{y} = 5$ ——— (i) $\quad 5x - \frac{2}{y} = 3$ ——— (ii)

বা, $2x = 5 - \frac{3}{y}$

বা, $x = \frac{1}{2}(5 - \frac{3}{y})$ ——— (iii)

(ii) নং সমীকরণে x -এর পরিবর্তে $\frac{1}{2}(5 - \frac{3}{y})$ বসিয়ে পাই,

$5x - \frac{2}{y} = 3$

বা, $5 \times \frac{1}{2}(5 - \frac{3}{y}) - \frac{2}{y} = 3$

বা, $\frac{25}{2} - \frac{15}{2y} - \frac{2}{y} = 3$

বা, $-\frac{15}{2y} - \frac{2}{y} = 3 - \frac{25}{2}$

বা, $\frac{-15-4}{2y} = \frac{6-25}{2}$

বা, $\frac{-19}{2y} = \frac{-19}{2}$

বা, $-38y = -38$

$\therefore$ $y =$ ☐

y -এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = \frac{1}{2}(5 - \frac{3}{1})$ $\therefore$ $x =$ ☐

নির্ণেয় সমাধান $x = 1$ ও $y = 1$

যাচাই করি,

$2\times1+\frac{3}{1}=$ ☐ এবং $5\times1-\frac{2}{1}=$ ☐ $\therefore$ x=1 ও y=1 মান (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

কষে দেখি - 5.5

1. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$ সমীকরণের x-কে y চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি
2. $2x + 3y = 9$ সমীকরণে y -এর পরিবর্তে $\frac{7-4x}{-5}$ বসিয়ে x -এর মান কত হবে লিখি।
3. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি প্রথমে পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

   (a) $3x - y = 7$, $2x + 4y = 0$ $\quad$ (b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$

4. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি ও সমাধানের মানগুলি সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি।

   (a) $2x + \frac{3}{y} = 1$, $5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$ $\quad$ (b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$, $\frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 5\frac{5}{6}$ $\quad$ (c) $\frac{x+y}{xy} = 3$, $\frac{x-y}{xy} = 1$ $\quad$ (d) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3}$, $x + y = \frac{7}{10}$

5. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি

   (i) $2(x-y) = 3$, $5x + 8y = 14$ $\quad$ (ii) $2x + \frac{3}{y} = 5$, $5x - \frac{2}{y} = 3$ $\quad$ (iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $\quad$ (iv) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, $7x - 5y = 2$

   (v) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$, $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$ $\quad$ (vi) $\frac{1}{3}(x-y) = \frac{1}{4}(y-1)$, $\frac{1}{7}(4x-5y) = x-7$ $\quad$ (vii) $\frac{x}{14} + \frac{x}{18} = 1$, $\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$

   (viii) $p(x+y) = q(x-y) = 2pq$

19 রাবেয়া ও শুভ ওই মেলা থেকে পেয়ারাগাছের চারা ও লেবুগাছের চারা কিনল। রাবেয়া 62 টাকায় 4টি পেয়ারাগাছের চারা এবং 5টি লেবুগাছের চারা কিনল। কিন্তু শুভ 36 টাকায় 3টি পেয়ারা গাছের চারা এবং 2টি লেবুগাছের চারা কিনল। একটি পেয়ারা গাছের চারা ও লেবুগাছের চারার দাম হিসাব করি।

আমি প্রথমে সহসমীকরণ গঠন করি

ধরি, 1টি পেয়ারাগাছের চারার দাম x টাকা এবং 1টি লেবুগাছের চারার দাম y টাকা।

শর্তানুসারে, $4x + 5y = 62$ ———— (i)

$3x + 2y = 36$ ———— (ii)

x অপনয়ন করার জন্য $3 \times (i) - 4 \times (ii)$ করে পাই,

$$3 \times 4x + 3 \times 5y = 3 \times 62$$
$$\underline{-\ 4 \times 3x \underset{-}{+} 4 \times 2y \underset{-}{=} 4 \times 36}$$

বা, $y\,(3 \times 5 - 4 \times 2) = 3 \times 62 - 4 \times 36$

$$\therefore y = \frac{36 \times 4 - 3 \times 62}{4 \times 2 - 3 \times 5} = \boxed{}$$

একইভাবে y অপনয়ন করার জন্য $2 \times (i) - 5 \times (ii)$ করে পাই,

$$x = \frac{2 \times 62 - 5 \times 36}{4 \times 2 - 3 \times 5} = \boxed{}$$

আমি একইভাবে দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ নিয়ে অপনয়ন পদ্ধতিতে x ও y-এর মান বের করি।

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ———— (iii)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ———— (iv)

$a_2 \times (iii) - a_1 \times (iv)$ করে পাই,

$$a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2 = 0$$
$$\underline{-\ a_1a_2x \underset{-}{+} b_2a_1y \underset{-}{+} c_2a_1 = \underset{-}{0}}$$

বা, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - b_2a_1} = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [যেখানে $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$]

$$\therefore \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ———— (v)}$$

একইভাবে $b_2 \times (iii) - b_1 \times (iv)$ করে পাই,

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0$$
$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0$$
$$\underline{-\qquad -\qquad -\qquad\qquad}$$
$$x\,(a_1b_2 - a_2b_1) = b_1c_2 - b_2c_1$$

বা, $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $[a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0]$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ———— (vi)}$$

∴ (v) নং ও (vi) নং থেকে পেলাম,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ———— (vii)}$$ [যেখানে, $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$]

20 আমি যদি (iii) নং ও (iv) নং দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণগুলি অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধানের মাঝের ধাপগুলি না করে সরাসরি (vii) নং সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান করি, তাহলে (i) নং ও (ii) নং সহসমীকরণের কী সমাধান পাই দেখি।

$4x + 5y - 62 = 0$ ———— (i)

$3x + 2y - 36 = 0$ ———— (ii)

y	1	x	y
5 (b_1)	– 62 (c_1)	4 (a_1)	5 (b_1)
2 (b_2)	– 36 (c_2)	3 (a_2)	2 (b_2)

$$\frac{x}{5\times(-36) - 2\times(-62)} = \frac{y}{(-62)\times 3 - (-36)\times 4} = \frac{1}{4\times2 - 3\times5}$$

বা, $\frac{x}{-56} = \frac{y}{-42} = \frac{1}{-7}$

সুতরাং, $\frac{x}{-56} = \frac{1}{-7}$ আবার, $\frac{y}{-42} = \frac{1}{-7}$

বা, $-7x = -56$ বা, $-7y = -42$

$\therefore$ $x = 8$ $\therefore$ $y = 6$

এই পদ্ধতিতে নির্ণেয় সমাধান পেলাম, $x = 8, y = 6$

$\therefore$ 1টি পেয়ারাগাছের চারার দাম 8 টাকা ও
1টি লেবুগাছের চারার দাম 6 টাকা।

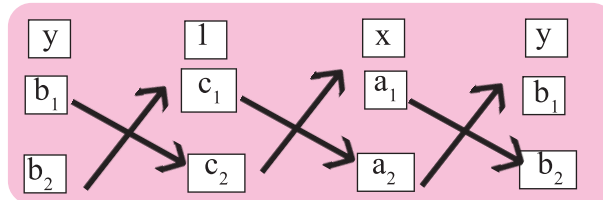
যাচাই করি, 4টি পেয়ারাগাছের চারা ও 5টি লেবুগাছের চারার মোট দাম 4×8 টাকা + 5×6 টাকা = ☐ টাকা। আবার, 3টি পেয়ারাগাছের চারা ও 2টি লেবুগাছের চারার মোট দাম 3×8 টাকা + 2×6 টাকা = ☐ টাকা

এইভাবে (vii) নং সূত্র সরাসরি প্রয়োগ করে দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণকে সমাধান করার পদ্ধতির নাম কী?

এই পদ্ধতির নাম **বজ্রগুণন পদ্ধতি** (Method of Cross multiplication)।

বুঝেছি, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$
$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

সুতরাং, $\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ [যেখানে, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$]

এই সূত্র সহজে মনে রাখার চেষ্টা করি।

21 সোফি একটি পরীক্ষায় সকল প্রশ্নের উত্তর দিয়ে 32 নম্বর পেয়েছে। প্রতিটি ঠিক উত্তরের জন্য 5 নম্বর পেয়েছে এবং প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 2 নম্বর বাদ দেওয়া হয়েছে। যদি প্রতিটি ঠিক উত্তরের জন্য 4 নম্বর দেওয়া হয় এবং প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 1 নম্বর বাদ দেওয়া হয়, তবে সোফির প্রাপ্ত নম্বর হয় 28; সহসমীকরণ গঠন করে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে হিসাব করে পরীক্ষায় মোট প্রশ্নের সংখ্যা লিখি।

ধরি, সোফি x টি প্রশ্নের সঠিক উত্তর দিয়েছে এবং y টি প্রশ্নের ভুল উত্তর দিয়েছে।

শর্তানুসারে, $5x - 2y = 32$
$4x - y = 28$

$\therefore$ $5x - 2y - 32 = 0$
$4x - y - 28 = 0$

$$\therefore \frac{x}{(-2)\times(-28)-(-1)\times(-32)} = \frac{y}{(-32)\times 4 - 5\times(-28)} = \frac{1}{5\times(-1)-4\times(-2)}$$

বা, $\frac{x}{\square} = \frac{y}{\square} = \frac{1}{\square}$

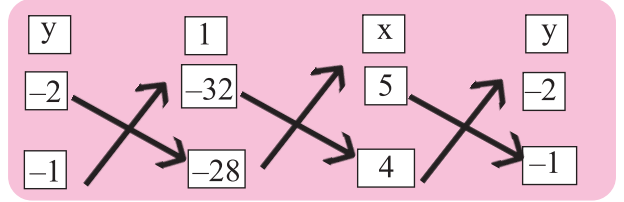
সুতরাং, $\frac{x}{24} = \frac{1}{3}$

বা, $3x = 24$

$\therefore x = \square$

এবং, $\frac{y}{12} = \frac{1}{3}$

বা, $3y = 12$

$\therefore y = \square$

বুঝেছি ওই পরীক্ষায় 8 টি + 4 টি = 12টি প্রশ্ন ছিল।

যাচাই করি,প্রথম ক্ষেত্রে 8টি ঠিক উত্তর ও 4টি ভুল উত্তরের জন্য মোট প্রাপ্ত নম্বর $= 8 \times 5 - 4 \times 2 = \square$

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে 8টি ঠিক উত্তর ও 4টি ভুল উত্তরের জন্য মোট প্রাপ্ত নম্বর $= 8 \times 4 - 4 \times 1 = \square$

কষে দেখি— 5.6

নীচের দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণগুলি বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করি।

1. $8x + 5y = 11$; $3x - 4y = 10$
2. $3x - 4y = 1$; $4x = 3y + 6$
3. $5x + 3y = 11$; $2x - 7y = -12$
4. $7x - 3y - 31 = 0$; $9x - 5y - 41 = 0$
5. $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{x}{12} - \frac{2y}{3} = 4$
6. $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = \frac{x}{4} - \frac{y}{3} - \frac{3}{20} = 0$
7. $\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8$; $\frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4$
8. $x + 5y = 36$; $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}$
9. $13x - 12y + 15 = 0$; $8x - 7y = 0$
10. $x + y = 2b$; $x - y = 2a$
11. $x - y = 2a$; $ax + by = a^2 + b^2$
12. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$; $ax - by = a^2 - b^2$
13. $ax + by = 1$; $bx + ay = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

আজ আমরা ঠিক করেছি সারাদিন নৌকায় ঘুরে বেড়াব। আমরা মোট 42 জন। দুটি নৌকা ভাড়া করেছি। নাজিরগঞ্জ থেকে আমাদের দুটি নৌকা একসঙ্গে ও একইবেগে যাত্রা শুরু করল। একটি নৌকায় আমরা বাড়ির ছোটোরা বসলাম এবং অন্য নৌকায় বাড়ির বয়স্করা বসলেন।

আমাদের নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 44 কিমি. এবং প্রতিকূলে 30 কিমি. গেল। কিন্তু অন্য নৌকা 13 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 55 কিমি. এবং প্রতিকূলে 40 কিমি. গেল।

22 আমি সহসমীকরণ গঠন করে ও সমাধান করে স্থির জলে আমাদের নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগ হিসাব করে লিখি।

ধরি, স্থির জলে নৌকার বেগ x কিমি./ঘণ্টা এবং স্রোতের বেগ y কিমি./ঘণ্টা।

$\therefore$ স্রোতের অনুকূলে 1 ঘণ্টায় নৌকা যায় $(x+y)$ কিমি.

স্রোতের অনুকূলে নৌকাটি $(x+y)$ কিমি. যায় 1 ঘণ্টায়

1 কিমি. যায় $\frac{1}{x+y}$ ঘণ্টায়

44 কিমি. যায় $\frac{44}{x+y}$ ঘণ্টায়

আবার, স্রোতের প্রতিকূলে 1 ঘণ্টায় নৌকা যায় $(x-y)$ কিমি.

স্রোতের প্রতিকূলে নৌকাটি $(x-y)$ কিমি যায় 1 ঘণ্টায়

1 কিমি. যায় $\frac{1}{x-y}$ ঘণ্টায়

30 কিমি. যায় $\frac{30}{x-y}$ ঘণ্টায়

শর্তানুসারে, $\frac{44}{x+y}+\frac{30}{x-y}=10$ —— (i) একইভাবে পাই, $\frac{55}{x+y}+\frac{40}{x-y}=13$ —— (ii)

23 আমি (i) নং ও (ii) - নং সহসমীকরণদুটি অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে x ও y -এর মান বের করার চেষ্টা করি।

ধরি, $x+y=p$ এবং $x-y=q$

$\frac{44}{p}+\frac{30}{q}=10$ —————— (i) $\frac{55}{p}+\frac{40}{q}=13$ —————— (ii)

$4\times$ (i) নং $-\,3\times$ (ii) নং করে পাই,

$$\frac{176}{p}+\frac{120}{q}=40$$
$$\frac{165}{p}+\frac{120}{q}=39$$
$$\frac{11}{p}=1 \quad \therefore \quad p=11$$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{55}{11}+\frac{40}{q}=13$

বা, $5+\frac{40}{q}=13$

বা, $\frac{40}{q}=8$

বা, $8q=40 \quad \therefore q=$ ☐

$\therefore$ পেলাম, $x+y=11$ —————— (iii)

$x-y=5$ —————— (iv)

যোগ করে, $2x=16$

$\therefore x=8$ (iii) থেকে পাই, $y=11-8=3$

$\therefore$ স্থির জলে আমাদের নৌকার বেগ ঘণ্টায় 8 কিমি. এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কিমি.।

24 আমার দিদি তার খাতায় একটি ভগ্নাংশ লিখেছে, যার লব ও হরের সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$ হবে। আবার ওই ভগ্নাংশের লব ও হর থেকে 3 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। খাতায় ভগ্নাংশটি কী লিখেছে না দেখে হিসাব করে লিখি।

ধরি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর y $\quad\therefore\quad$ ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$

শর্তানুসারে, $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$ ——— (i)

$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2}$ ——— (ii)

(i) নং থেকে পাই, $9x+18 = 7y+14$

$\therefore\ 9x-7y = -4$ ——— (iii)

(ii) নং থেকে পাই, $2x-6 = y-3$

$\therefore\ 2x-y = 3$ ——— (iv)

আমি অপনয়ন পদ্ধতিতে (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ সমাধান করে পেলাম,

x = 5 এবং y = 7 [নিজে করি]

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $\frac{5}{7}$

আমি যাচাই করে দেখি ঠিক ভগ্নাংশ পেলাম নাকি।

ভগ্নাংশের লব ও হরের সাথে 2 যোগ করে পাই → $\frac{5+2}{7+2} = \frac{7}{9}$

ভগ্নাংশের লব ও হর থেকে 3 বিয়োগ করে পাই → $\frac{5-3}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

25 আমার বন্ধু জাফর খাতায় একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখল। জাফরের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 8; আবার ওই সংখ্যার সঙ্গে 18 যোগ করলে সংখ্যাটির অঙ্কগুলি স্থানবিনিময় করবে। আমরা হিসাব করে জাফরের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যাটি লিখি।

ধরি, জাফরের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y

$\therefore$ সংখ্যাটি $10y + x$

শর্তানুসারে, $x + y = 8$ ——— (i)

দশক	একক
y	x

অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করে অর্থাৎ $10y + x$ সংখ্যাটি হবে $10x + y$

শর্তানুসারে, $10y + x + 18 = 10x + y$

বা, $10y - y + x - 10x + 18 = 0$

বা, $9y - 9x + 18 = 0$

$\therefore\ y - x + 2 = 0$ ——— (ii)

দশক	একক
x	y

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই, $x = 5$ এবং $y = 3$ [নিজে করি]

সংখ্যাটি $10 \times 3 + 5 = 35$

আমি যাচাই করে দেখছি, $3 + 5 = \square$ এবং $35 + 18 = \square$

26 মুরাদ একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখবে যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 11 এবং সংখ্যাটির সাথে 63 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করবে। সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করি ও নির্ণেয় দুই অঙ্কের সংখ্যাটি লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি - 5.7

1. আমাদের স্কুলের পাশে বই-এর দোকান থেকে আমার বন্ধু রীতা 34 টাকায় 5টি পেন ও 3টি পেনসিল কিনেছে। কিন্তু সুমিত ওই একই দোকান থেকে একই দামে 7 টি পেন ও 6টি পেনসিল 53 টাকায় কিনেছে। আমি সহসমীকরণ গঠন করে প্রতিটি পেন ও প্রতিটি পেনসিলের দাম হিসাব করে লিখি।

2. আমার বন্ধু আয়েশা ও রফিকের ওজন একত্রে 85 কিগ্রা.। আয়েশার ওজনের অর্ধেক রফিকের ওজনের $\frac{4}{9}$ অংশের সমান হলে, সহসমীকরণ গঠন করে তাদের পৃথকভাবে ওজন হিসাব করে লিখি।

3. আমার কাকাবাবুর বর্তমান বয়স আমার বোনের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 10 বছর আগে আমার কাকাবাবুর বয়স আমার বোনের বয়সের তিনগুণ ছিল। সহসমীকরণ গঠন করে তাদের বর্তমান বয়স পৃথকভাবে হিসাব করে লিখি।

4. আমাদের গ্রামের দেবকুমারকাকু 590 টাকার একটি চেক ব্যাঙ্ক থেকে ভাঙালেন। তিনি যদি ব্যাঙ্ক থেকে পাঁচ টাকার ও দশ টাকার মোট 70 খানা নোট পেয়ে থাকেন, তবে তিনি ব্যাঙ্ক থেকে কতগুলি পাঁচ টাকার নোট এবং কতগুলি দশ টাকার নোট পেলেন হিসাব করে লিখি।

5. আমি স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে এমন একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ লিখব যার হরটি লব অপেক্ষা 5 বেশি এবং লব ও হরের সঙ্গে যদি 3 যোগ করি তবে ভগ্নাংশটি $\frac{3}{4}$ হবে। সহসমীকরণ গঠন করি ও সমাধান করে প্রকৃত ভগ্নাংশটি ব্ল্যাকবোর্ডে লিখি।

6. মারিয়া তার খাতায় দুটি এমন সংখ্যা লিখেছে যে প্রথম সংখ্যার সঙ্গে 21 যোগ করলে তা দ্বিতীয় সংখ্যার দ্বিগুণ হয়। আবার দ্বিতীয় সংখ্যার সঙ্গে 12 যোগ করলে তা প্রথম সংখ্যার দ্বিগুণ হয়। হিসাব করে মারিয়ার লেখা সংখ্যা দুটি লিখি।

7. লালিমা ও রমেন দুজনেই তাদের বাড়ির বাগান পরিষ্কার করে। লালিমা 4 দিন ও রমেন 3দিন একসঙ্গে বাগান পরিষ্কার করলে কাজটির $\frac{2}{3}$ অংশ সম্পন্ন হয়। আবার লালিমা 3 দিন ও রমেন 6 দিন একসঙ্গে বাগান পরিষ্কার করলে কাজটির $\frac{11}{12}$ অংশ সম্পন্ন হয়। সহসমীকরণ গঠন করি এবং সমাধান করে লালিমা ও রমেন পৃথকভাবে কাজটি করলে কতদিনে শেষ করবে হিসাব করে লিখি।

8. আমার মা দু-ধরনের শরবত তৈরি করেছেন। প্রথম ধরনের 100 লিটার শরবতে 5 কিগ্রা. চিনি এবং দ্বিতীয় ধরনের 100 লিটার শরবতে 8 কিগ্রা. চিনি আছে। আমি দু-ধরনের শরবত মিশিয়ে 150 লিটার শরবত তৈরি করব, যাতে চিনি থাকবে $9\frac{2}{3}$ কিগ্রা.। সহসমীকরণ গঠন করে হিসাব করে দেখি 150 লিটার শরবতে দু-ধরনের শরবত কতটা পরিমাণ মেশাব।

9. গত বছরে বকুলতলা গ্রামপঞ্চায়েত নির্বাচনে অখিলবাবু ও ছন্দাদেবী প্রার্থী ছিলেন। অখিলবাবু ছন্দাদেবীকে 75 ভোটে পরাজিত করলেন। অখিলবাবুকে যারা ভোট দিয়েছেন তাঁদের 20% যদি ছন্দাদেবীকে ভোট দিতেন, তাহলে ছন্দাদেবী 19 ভোটে জিততে পারতেন। সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করে দেখি, কে কত ভোট পেয়েছেন।

10. রফিকদের আয়তক্ষেত্রাকার মেঝের দৈর্ঘ্য 2 মিটার এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 75 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। কিন্তু দৈর্ঘ্য 2 মিটার হ্রাস এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 15 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। সহসমীকরণ গঠন করে রফিকদের মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করি।

11. আমার বন্ধু মেরি ঈশানকে বলল, তোমার টাকার $\frac{1}{3}$ আমায় দাও তাহলে আমার 200 টাকা হবে। ঈশান মেরিকে বলল, তোমার টাকার অর্ধেক আমাকে দিলে আমার 200 টাকা হবে। সহসমীকরণ গঠন করে হিসাব করে দেখি কার কাছে কত টাকা আছে।

12. আজ দাদা ও তার কিছু বন্ধুরা একসাথে মেলায় যাবে। তাই আমার দাদু তাদের মধ্যে কিছু টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দিলেন। দেখছি, যদি 2 জন বন্ধু কম থাকত তবে প্রত্যেকে 18 টাকা পেত। আবার যদি 3জন বন্ধু বেশি থাকত তবে প্রত্যেকে 12 টাকা পেত। দাদারা কতজন মেলায় গিয়েছিল এবং দাদু মোট কত টাকা ওদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দিয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।

13. আমার দাদার একটি থলিতে 1 টাকার মুদ্রা ও 50 পয়সার মুদ্রা মিলিয়ে মোট 350 টাকা আছে। আমার বোন ওই টাকার থলি থেকে এক তৃতীয়াংশ 50 পয়সা বের করে তার জায়গায় সমসংখ্যক 1 টাকার মুদ্রা রেখে দিল এবং এখন ওই থলিতে মোট টাকার পরিমাণ 400 টাকা হলো। প্রথমে দাদার থলিতে আলাদাভাবে 1 টাকার মুদ্রা ও 50 পয়সার মুদ্রা কতগুলি ছিল হিসাব করে লিখি।

14. আজ মামার বাড়ি যাব। তাই একটি মোটরগাড়ি আমাদের বাড়ি থেকে সমবেগে মামার বাড়ির দিকে রওনা দিল। যদি গাড়িটির গতিবেগ ঘণ্টায় 9 কিমি. বেশি হতো তবে ওই পথ অতিক্রম করতে তার 3 ঘণ্টা সময় কম লাগত। আবার গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 6 কিমি. কম হতো তবে ওই পথ অতিক্রম করতে তার 3 ঘণ্টা বেশি সময় লাগত। আমাদের বাড়ি থেকে মামার বাড়ির দূরত্ব এবং গাড়ির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিমি. ছিল হিসাব করে লিখি।

15. মোহিত এমন একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখবে যেটি তার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 4 গুণ অপেক্ষা 3 বেশি এবং সংখ্যাটির অঙ্কদুটি স্থানবিনিময় করলে যে সংখ্যা হয় তা মূল সংখ্যার চেয়ে 18 বেশি। হিসাব করে দেখি মোহিত কোন সংখ্যা লিখবে।

16. আমি একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখব যার অঙ্কদুটির সমষ্টি 14 এবং সংখ্যাটি থেকে 29 বিয়োগ করলে অঙ্কদুটি সমান হবে। সহসমীকরণ গঠন করি ও সমাধান করে দেখি দুই অঙ্কের সংখ্যাটি কী হবে।

17. রহমত চাচা তার নৌকা নিয়ে স্রোতের অনুকূলে 6 ঘণ্টায় 30 মাইল গিয়ে এই পথ স্রোতের প্রতিকূলে 10 ঘণ্টায় ফিরে এলেন। স্থির জলে রহমত চাচার নৌকার গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগ হিসাব করে লিখি।

18. হাওড়া স্টেশন থেকে একটি ট্রেন ছাড়ার 1 ঘণ্টা পরে বিশেষ কারণে 1 ঘণ্টা দেরি করে এবং তারপর পূর্বের বেগের $\frac{3}{5}$ অংশ বেগে চলে নির্দিষ্ট সময়ের 3 ঘণ্টা পরে গন্তব্যস্থলে পৌঁছায়। যদি বিশেষ কারণটি পূর্বস্থান থেকে আরও 50 কিমি. দূরবর্তী স্থানে হতো, তাহলে ট্রেনটি আগের চেয়ে 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পূর্বে গন্তব্যস্থানে পৌঁছাতো। ট্রেনটি মোট কত পথ চলেছিল এবং পূর্বের বেগ কত ছিল হিসাব করে লিখি।

19. মৌসুমি দুই অঙ্কের একটি সংখ্যাকে অঙ্কদুটির সমষ্টি দিয়ে ভাগ করে ভাগফল 6 এবং ভাগশেষ 6 পায়। যদি মৌসুমি অঙ্ক দুটি স্থান বিনিয়ম করে সংখ্যাটিকে অঙ্ক দুটির সমষ্টি দিয়ে ভাগ করে, তাহলে ভাগফল 4 এবং ভাগশেষ 9 হয়। সহসমীকরণ গঠন করে মৌসুমির সংখ্যাটি নির্ণয় করি।

20. ফরিদাবিবি কয়েকটি বাক্সে কমলালেবু রাখতে গিয়ে দেখলেন যে তিনি যদি প্রত্যেকটি বাক্সে 20 টি কমলালেবু বেশি রাখেন তাহলে 3টি বাক্স কম লাগে। আবার তিনি যদি প্রত্যেকটি বাক্সে 5টি কমলালেবু কম রাখেন তাহলে 1টি বাক্স বেশি লাগে। সহসমীকরণ গঠন করে হিসাব করি ফরিদাবিবির কাছে কতগুলি কমলালেবু এবং কতগুলি বাক্স ছিল।

21. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) যদি $x = 3t$ এবং $y = \frac{2t}{3} - 1$ হয়, তাহলে t-এর কোন মানের জন্য $x = 3y$ হবে?

(ii) k-এর কোন মানের জন্য $2x + 5y = 8$ এবং $2x - ky = 3$ সমীকরণদ্বয়ের কোনো সমাধান থাকবে না?

(iii) x, y বাস্তব সংখ্যা এবং $(x - 5)^2 + (x - y)^2 = 0$ হলে, x এবং y - এর মান কত?

(iv) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5$ হলে, x এবং y - এর মান কত?

(v) r -এর কোন মানের জন্য $rx - 3y - 1 = 0$ এবং $(4 - r)x - y + 1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান সম্ভব নয়?

(vi) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণকে $y = mx + c$ আকারে লিখি, যেখানে m এবং c ধ্রুবক।

(vii) k -এর কোন মানের জন্য $kx - 21y + 15 = 0$ এবং $8x - 7y = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সমাধান থাকবে?

(viii) a এবং b -এর কোন মানের জন্য $5x + 8y = 7$ এবং $(a+b)x + (a-b)y = (2a + b + 1)$ সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্য সমাধান থাকবে?

22. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $4x + 3y = 7$ এবং $7x - 3y = 4$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি নির্দিষ্ট সমাধান আছে (b) অসংখ্য সমাধান আছে

(c) কোনো সমাধান নেই (d) কোনোটিই নয়

(ii) $3x + 6y = 15$ এবং $6x + 12y = 30$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি নির্দিষ্ট সমাধান আছে। (b) অসংখ্য সমাধান আছে।

(c) কোনো সমাধান নেই (d) কোনোটিই নয়।

(iii) $4x + 4y = 20$ এবং $5x + 5y = 30$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি নির্দিষ্ট সমাধান আছে (b) অসংখ্য সমাধান আছে।

(c) কোনো সমাধান নেই (d) কোনোটিই নয়।

(iv) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির কোনটির সমাধান (1, 1)

(a) $2x + 3y = 9$ (b) $6x + 2y = 9$

(c) $3x + 2y = 5$ (d) $4x + 6y = 8$

(v) $4x + 3y = 25$ এবং $5x - 2y = 14$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান

(a) $x = 4, y = 3$ (b) $x = 3, y = 4$

(c) $x = 3, y = 3$ (d) $x = 4, y = -3$

(vi) $x + y = 7$ সমীকরণের সমাধানগুলি হলো

(a) (1, 6), (3, –4) (b) (1, –6), (4, 3)

(c) (1, 6), (4, 3) (d) (–1, 6), (–4, 3)

6 সামান্তরিকের ধর্ম

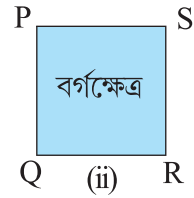
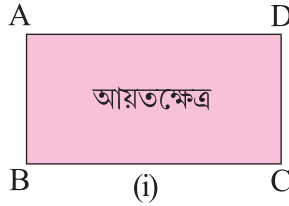
PROPERTIES OF PARALLELOGRAM

আগামী বুধবার আমরা নবম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা নিজেদের ইচ্ছামতো হাতের কাজ তৈরি করে দেখাব। তাই আজ রবিবার দুপুরে আমরা ছয়জন বন্ধু সায়ন্তনদের বাড়ির ছাদের ঘরে জড়ো হয়েছি।

আমরা অনেকগুলি পুরোনো পিচবোর্ডের বাক্স জড়ো করেছি। এগুলির সাহায্যে আমরা কেউ বাড়ি তৈরি করব, কেউ ব্রিজ তৈরি করব, কেউ বা নানান ধরনের মডেল তৈরি করব।

আমি দুটি পিচবোর্ডের বাক্সের সকল ধারগুলি খুলে ফেললাম। কী রকম জ্যামিতিক আকার পেলাম নীচে আঁকি—

A D আয়তক্ষেত্র B (i) C

P S বর্গক্ষেত্র Q (ii) R

দেখছি, দুটি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD ও PQRS পেলাম।

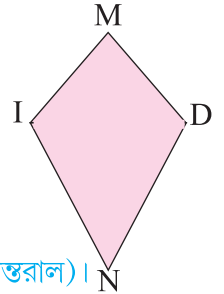
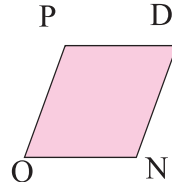
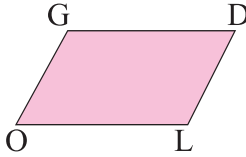
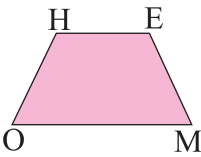
চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD এর ☐ টি শীর্ষবিন্দু A, B, C ও D; ☐ টি বাহু AB, BC, CD ও DA এবং ☐ টি কোণ ∠ABC , ☐ , ☐ , ☐ ; ABCD চতুর্ভুজের কর্ণগুলি হলো ☐ ও ☐

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র PQRS-এর ☐ টি শীর্ষবিন্দু P,Q,R ও S; ☐ টি বাহু PQ,QR,RS এবং SP;

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র PQRS এর কোণগুলি ও কর্ণগুলি লিখি।

আমার বন্ধু রণিতা তার পিচবোর্ডের বাক্সটি খুলল এবং তলগুলি কাঁচি দিয়ে কেটে নানান জ্যামিতিক আকারের ক্ষেত্র তৈরি করল।

সে করল

H E O M   G D O L   P D O N   M I D N

দেখছি, রণিতার তৈরি HOME চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের HE||OM (অর্থাৎ HE ও OM সমান্তরাল)।

∴ HOME চতুর্ভুজ আকারের ক্ষেত্র একটি ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র।

যে চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল, তাকে **ট্রাপিজিয়াম** বলা হয়।

কিন্তু রণিতার তৈরি GOLD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের GO||DL এবং GD||OL.

∴ GOLD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাকে **সামান্তরিক** বলা হয়।

আবার, POND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের PO || DN, PD || ON এবং PO = ON

POND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি ☐ আকারের ক্ষেত্র।

∴ যে সামান্তরিকের একজোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান তাকে **রম্বস** বলা হয়।

(i) ও (ii) নং ABCD ও PQRS -চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রদ্বয়ের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল। এরাও কি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র?

আয়তক্ষেত্র ABCD এবং বর্গক্ষেত্র PQRS এরাও সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

বুঝেছি, যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাকে **আয়তাকার চিত্র** বলা হয়।

যে আয়তকার চিত্রের একজোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হয় তাকে **বর্গাকার চিত্র** বলা হয়।

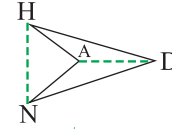
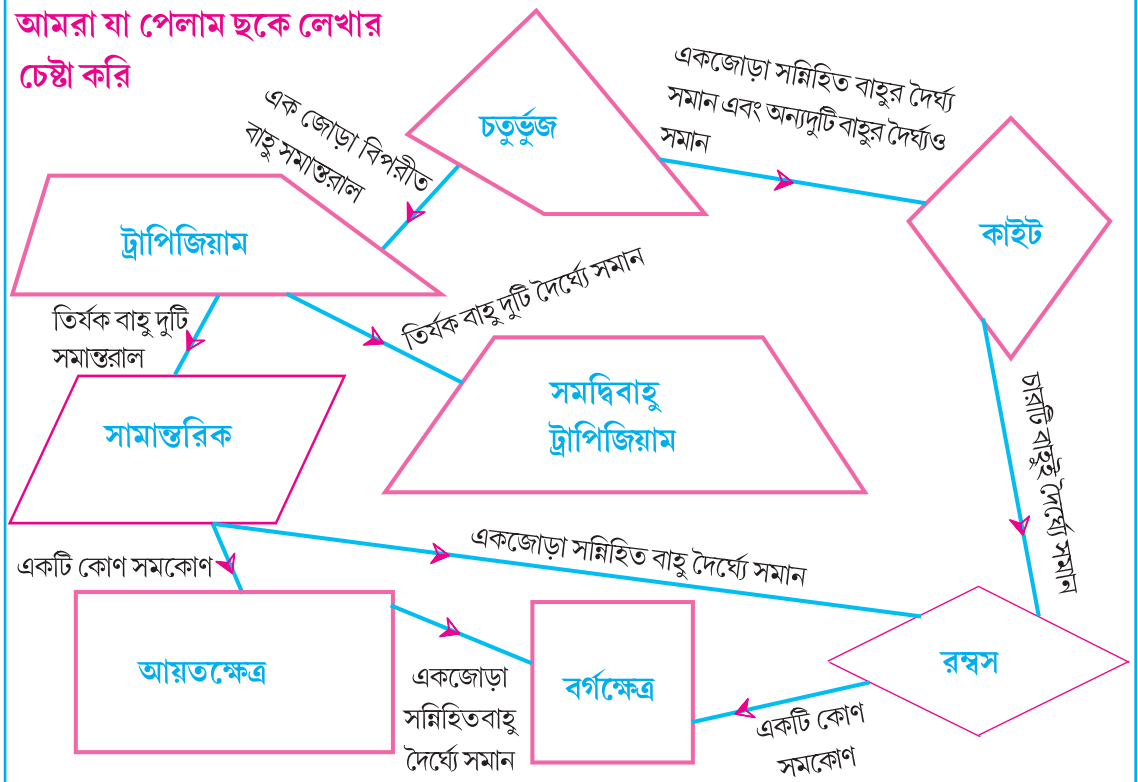
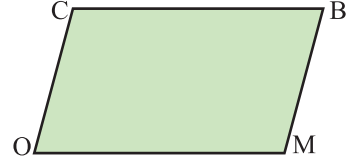
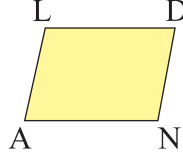
অথবা রম্বসের একটি কোণ সমকোণ হলে তাকে **বর্গাকার চিত্র** বলা হয়।

পেলাম,
(i) প্রতিটি বর্গাকার চিত্রই, আয়তাকার চিত্র এবং রম্বস।
(ii) প্রতিটি আয়তাকার চিত্র, বর্গাকার চিত্র এবং রম্বসই সামান্তরিক।
(iii) প্রতিটি সামান্তরিকই ☐ (আয়তাকার চিত্র/ট্রাপিজিয়াম)। [নিজে করি]

মেপে দেখছি, MIND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের MI=MD এবং NI=ND

∴ MIND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র কাইট আকারের ক্ষেত্র।

পেলাম, যে চতুর্ভুজের এক জোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং বাকি দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যও সমান তাকে **কাইট** বলা হয়।

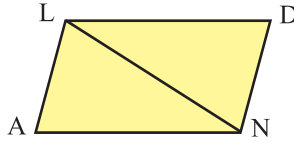
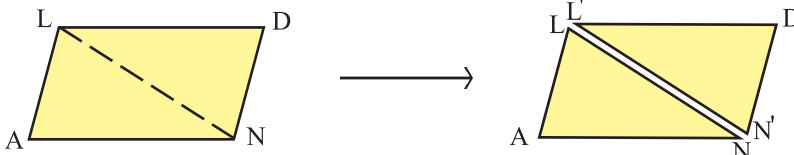
মিহির একটি পিচবোর্ড কেটে অন্য একটি আকার তৈরি করল —

দেখছি, HAND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের একটি কর্ণ চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের মধ্যে নেই। এদের **অকুব্জ (Concave) চতুর্ভুজ** বলা হয়। (এই ধরনের চতুর্ভুজ নিয়ে এখানে কোনো আলোচনা নেই।)

সায়ন্তন তার পিচবোর্ডের টুকরোগুলি কাঁচি দিয়ে কেটে কেটে নানান আকারের রঙিন সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র তৈরি করল।

আমি হলুদ রঙের সামান্তরিক ক্ষেত্র LAND-এর বাহুগুলি মেপে দেখছি, LA = DN, LD = AN
আবার চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle LAN = \angle LDN$ এবং $\angle ALD = \angle AND$

পেলাম LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ও বিপরীত কোণগুলির মান সমান।

আমিও মেপে দেখছি সবুজ রঙের COMB সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ও বিপরীত কোণগুলির মান সমান। [নিজে করি]

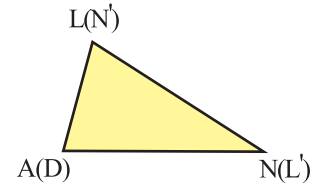
হাতেকলমে সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান।

(i) প্রথমে হলুদ রঙের LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের মতো আরো দুটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র এঁকে কেটে নিলাম।

(ii) এবার LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের L ও N বিন্দু বরাবর ভাঁজ করে কর্ণ LN আঁকলাম।

(iii) এরপর নীচের ছবির মতো LN বরাবর কেটে দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ΔLAN ও $\Delta N'DL'$ পেলাম,

(iv) এবার LAN ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র অপর ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র N'DL'-এর উপর এমনভাবে রাখলাম যাতে নীচের ছবির মতো হয়।

ΔLAN-এর A বিন্দু $\Delta N'DL'$-এর D বিন্দুতে,

ΔLAN-এর L বিন্দু $\Delta N'DL'$-এর N' বিন্দুতে এবং

ΔLAN-এর N বিন্দু $\Delta N'DL'$-এর L' বিন্দুতে সমাপতিত হয়।

দেখছি, ΔLAN ও $\Delta N'DL'$ সম্পূর্ণভাবে একটির সাথে অপরটি মিশে গেছে।

$\therefore$ পেলাম $\Delta LAN \cong \Delta N'DL'$ এবং LA = N'D এবং AN = DL'

$\therefore$ হাতেকলমে যাচাই করলাম যে, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান।

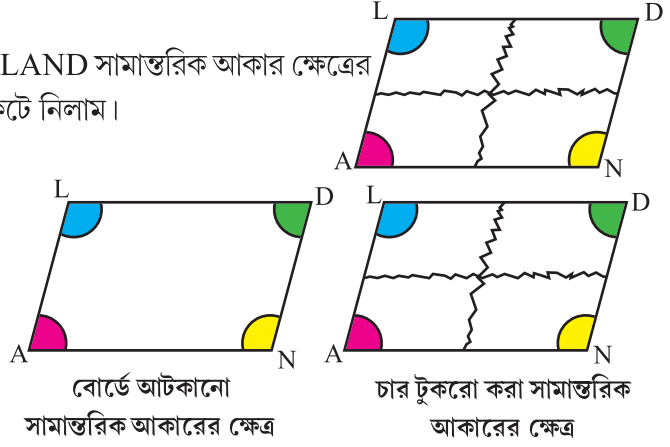
1 আয়েশা LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি মানে পরস্পর সমান, এই ধর্মটি হাতেকলমে যাচাই করার জন্য LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের মাপের আরও দুটি সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র এঁকে কেটে নিল।

হাতেকলমে

(i) এবার আমি পাশের ছবির মতো একটি LAND সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের চারটি কোণ এঁকে রঙিন করলাম ও কেটে নিলাম।

(ii) এরপরে অপর LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র বোর্ডে আটকে দিলাম এবং কেটে নেওয়া চারটি কোণের টুকরো বোর্ডে আটকানো সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের সঙ্গে মিলিয়ে কী পেলাম লিখি।

বোর্ডে আটকানো সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র

চার টুকরো করা সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র

দেখছি, $\angle A = \angle D$ এবং $\angle L = \angle N$

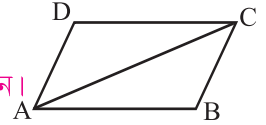
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলির মান সমান।

2 আমি একইভাবে অপর একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র আঁকি ও কেটে নিয়ে হাতেকলমে যাচাই করি যে সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ও কোণগুলির মান সমান। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য- 14 কোনো সামান্তরিকের

(i) প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে

(ii) বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান। (iii) বিপরীত কোণগুলি মানে সমান।

প্রদত্ত (দেওয়া আছে) : ধরি, ABCD সামান্তরিক। অর্থাৎ AB ∥ DC এবং AD ∥ BC;
AC কর্ণ সামান্তরিককে দুটি ত্রিভুজ $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$-তে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ii) $AB = DC; BC = AD$

এবং (iii) $\angle ABC = \angle ADC; \angle BAD = \angle BCD$

প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$-এর মধ্যে, $\angle ACB =$ একান্তর $\angle CAD$ [$\because$ AD ∥ BC এবং AC উহাদের ছেদক] .... (1)

AC [সাধারণ বাহু]

এবং $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$ [$\because$ AB ∥ DC এবং AC উহাদের ছেদক] .... (2)

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ [সর্বসমতার A-S-A শর্তানুসারে] [(i) প্রমাণিত]

$\therefore$ $AB = DC$ ও $BC = AD$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] [(ii) প্রমাণিত]

আবার, $\angle ABC = \angle ADC$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

$\angle BAC + \angle CAD = \angle ACB + \angle ACD$ [(1) ও (2) থেকে পেলাম]

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BCD$ [(iii) প্রমাণিত]

3. PQRS একটি সামান্তরিক এঁকে কর্ণ PR টানলাম। এবার যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\triangle PQR \cong \triangle RSP$; PQ = SR, PS = QR এবং $\angle PQR = \angle PSR$, $\angle QPS = \angle QRS$ **[নিজে করি]**

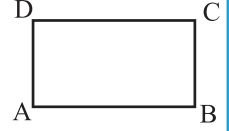
প্রয়োগ : 1 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, আয়তাকার চিত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

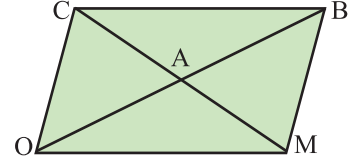
উত্তর সংকেত : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ সেটি একটি আয়তাকার চিত্র। ধরি, $\angle BAD = 90°$

আবার $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ [$\because$ AD $\parallel$ BC এবং AB উহাদের ছেদক]

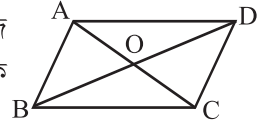
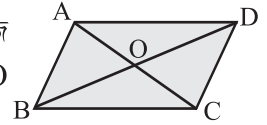
$\therefore \quad \angle ABC = 90°$

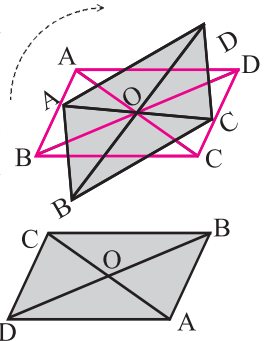
যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান,

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BCD = 90°, \angle ABC = \angle ADC = 90°$

রণিতা সায়ন্তনের তৈরি সবুজ রঙের COMB সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের দুটি কর্ণ CM ও OB অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

স্কেল ও কাঁটা কম্পাসের সাহায্যে দেখছি, CA=AM এবং OA=AB

সায়ন্তন আরও একটি যে কোনো আকারের সামান্তরিক অঙ্কন করল ও তার দুটি কর্ণ এঁকে কর্ণগুলির অংশের মাপ নিয়ে দেখল যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

হাতে কলমে আমি হাতে কলমে যাচাই করি যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(i) আমি সাদা আর্ট পেপারে একটি সামান্তরিক ABCD অঙ্কন করলাম। কাগজ ভাঁজ করে এই সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

(ii) এবার একটি ট্রেসিং পেপারে একই মাপের সামান্তরিক ABCD আঁকলাম। ভাঁজ করে এই সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(iii) এবার একটি বোর্ডে আর্ট পেপারে আঁকা সামান্তরিকটি আটকে দিলাম এবং তার উপরে ট্রেসিং পেপারে আঁকা সামান্তরিকটি একটি পিনের সাহায্যে আঁটকে দিলাম।

(iv) O বিন্দুতে পিন আটকে ট্রেসিং পেপারটি ঘড়ির কাঁটার দিকে (বা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে) একবার 180° ঘোরালাম যাতে নীচের ছবির মতো ট্রেসিং পেপারের আঁকা সামান্তরিক আর্টপেপারে আঁকা সামান্তরিকের সঙ্গে সমাপতিত হয়।

(v) দেখছি, AO = OC এবং BO = OD

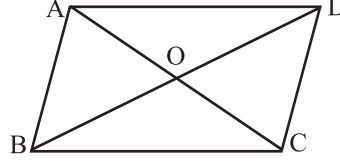
হাতেকলমে পেলাম, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

C B O D A

4. সাব্বা PQRS একটি সামান্তরিক অঙ্কন করল এবং এই সামান্তরিকের দুটি কর্ণ PR ও QS অঙ্কন করল যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

আমি হাতে কলমে যাচাই করি PO = OR, QO = OS [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 15 সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে

প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: AO = OC এবং BO = OD.

প্রমাণ : Δ AOD ও Δ BOC-এর মধ্যে,

$\angle CAD$ = একান্তর $\angle ACB$ [$\because$ AD ∥ BC এবং AC উহাদের ছেদক]

অর্থাৎ $\angle OAD$ = একান্তর $\angle OCB$

AD = BC [$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

এবং $\angle AOD$ = বিপ্রতীপ $\angle BOC$ [$\because$ AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।]

$\therefore$ ΔAOD ≅ ΔBOC [সর্বসমতার A-S-A শর্তানুসারে]

$\therefore$ AO = OC এবং BO = OD [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] **(প্রমাণিত)**

5 PQRS সামান্তরিকের দুটি কর্ণ PR ও QS পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করলে যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে PO = OR এবং QO = OS। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 2 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রদত্ত : PQRS রম্বসের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: PO = OR, QO = OS এবং $\angle POS = 90°$

প্রমাণ : PQRS রম্বসের PO = OR এবং QO = OS [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং রম্বস একটি সামান্তরিক]

ΔPOQ ও ΔPOS -এর মধ্যে,

QO = SO

PQ = PS [রম্বসের বাহু]

এবং PO সাধারণ বাহু

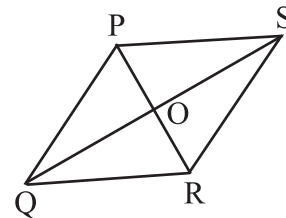
$\therefore$ ΔPOQ ≅ ΔPOS [সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\angle POQ = \angle POS$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

কিন্তু, $\angle POQ + \angle POS = 180°$ [$\because$ সরলকোণ]

বা, $2\angle POS = 180°$

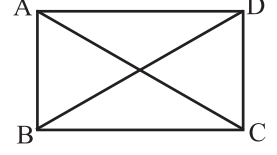
$\therefore$ $\angle POS = 90°$

$\therefore$ রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 3 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে আয়তাকার চিত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

উত্তর সংকেত : ABCD আয়তাকার চিত্রের, $\angle ABC = 90°$

$AB \parallel DC$ এবং BC ছেদক। $\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180°$

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90°$

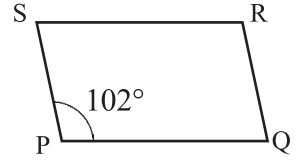
$\Delta ABC \cong \Delta DBC$ [**প্রমাণ নিজে করি**] $\therefore AC = BD$

প্রয়োগ : 4 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, বর্গাকার চিত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5 সাব্বা PQRS একটি সামান্তরিক এঁকেছে, যার $\angle P = 102°$;

আমি হিসাব করে PQRS সামান্তরিকের অপর কোণগুলির মাপ লিখি।

$\angle SPQ = 102° = \angle SRQ$ [সামান্তরিকের বিপরীতকোণ]

$\angle SPQ + \angle PSR =$ ☐ [$\because PQ \parallel SR$ এবং PS তাদের ছেদক]

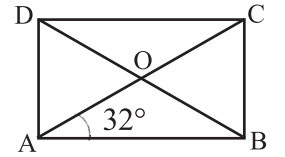
$\therefore \angle PSR = 180° - 102° = 78° = \angle PQR$

প্রয়োগ : 6 যদি সাব্বার আঁকা PQRS সামান্তরিকের $\angle PQR = 75°$ হতো, তাহলে $\angle QRS$ এর মান কত হতো হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7 সায়ন্তন একটি আয়তাকার চিত্র ABCD এঁকেছে যার দুটি কর্ণ AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle OAB = 32°$ হলে, $\angle OBC$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

ABCD আয়তাকার চিত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

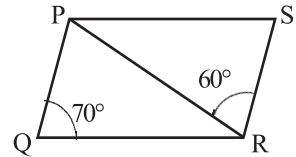
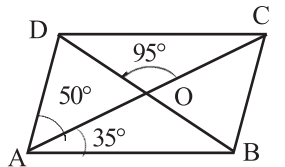
সুতরাং, $OA = OC = OB = OD$

$\therefore \Delta AOB$ সমদ্বিবাহু। সুতরাং, $\angle OAB = \angle OBA$

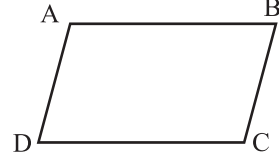
$\therefore \angle OAB = 32° = \angle OBA$; $\therefore \angle OBC = 90° - 32° =$ ☐ [$\because$ ABCD আয়তাকার চিত্র]

প্রয়োগ : 8 আমি পাশের PQRS সামান্তরিকের ছবি দেখি ও $\angle QPR$, $\angle SPR$ ও $\angle PRQ$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

PQRS সামান্তরিকের $PQ \parallel SR$ এবং PR ছেদক।

$\therefore \angle QPR =$ একান্তর $\angle PRS = 60°$

একইভাবে, $\angle SPR =$ ☐ , $\angle PRQ =$ ☐ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9 পাশের ছবিতে ABCD সামান্তরিকের $\angle BAO = 35°$, $\angle DAO = 50°$ এবং $\angle COD = 95°$; আমি হিসাব করে $\angle ABO$, $\angle ODC$, $\angle ACB$ ও $\angle CBD$-এর মান লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10 ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা 40 সেমি. এবং AB=12 সেমি. হলে, সামান্তরিকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

AB = DC =12 সেমি. এবং AD + BC = (40–2×12) সেমি. = 16 সেমি.

$\therefore$ AD = BC = $\frac{16}{2}$ সেমি. = 8 সেমি.

প্রয়োগ : 11 ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা 35সেমি. এবং AB = 9.5 সেমি. হলে, AD বাহুর দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

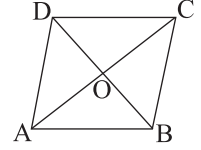
প্রয়োগ : 12 সাথি একটি রম্বস এঁকেছে যার কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 24সেমি. ও 18 সেমি.। আমি হিসাব করে রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য লিখি।

ধরি, ABCD রম্বসের AC = 24 সেমি. এবং BD = 18 সেমি।

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ AO = $\frac{24}{2}$ সেমি. = 12 সেমি. এবং BO = $\frac{18}{2}$ সেমি. = 9 সেমি. এবং $\angle AOB = 90°$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ AOB-এর, $AB^2 = OA^2 + OB^2 = (12^2 + 9^2)$সেমি.^{2} = (144 + 81) সেমি.^{2} = 225 সেমি.^{2}

$\therefore$ AB = $\sqrt{225 \text{ সেমি.}^2}$ = 15 সেমি.

সুতরাং ABCD রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 15 সেমি.

প্রয়োগ : 13 যদি ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সেমি. ও 6 সেমি. হয়, তবে ABCD রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ: 14 আমি ABCD সামান্তরিকের $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ কোণের দুটি সমদ্বিখণ্ডক এঁকেছি যা DC এবং AB বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, PAQC একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত: ABCD সামান্তরিকের $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুটি AP ও CQ যথাক্রমে DC ও AB বাহুকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: APCQ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের DC || AB এবং AP ছেদক।

সুতরাং, $\angle DPA$ = একান্তর $\angle PAQ$

আবার, $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle DAB$ [$\because$ AP, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$= \frac{1}{2} \angle DCB$ [$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

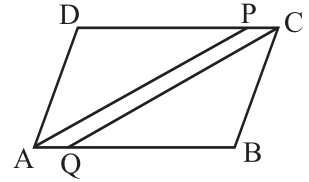
$= \angle PCQ$ [$\because$ CQ, $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

সুতরাং, $\angle DPA = \angle PCQ$

কিন্তু PA ও CQ সরলরেখাংশ দুটিকে DC সরলরেখাংশ ছেদ করায় অনুরূপ কোণদুটি সমান।

$\therefore$ PA || CQ

আবার, AQ || PC [যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহু AB ও DC সমান্তরাল]

APCQ চতুর্ভুজের AP || QC এবং AQ || PC; সুতরাং APCQ একটি সামান্তরিক।

প্রয়োগ : 15 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের একটি ছেদকের অন্তর্ভুক্ত অন্ত:কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তাকার চিত্র উৎপন্ন করে।

প্রদত্ত : AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে PQ ছেদক যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। EG ও EH যথাক্রমে ∠BEF ও ∠AEF কোণ দুটিকে এবং FG ও FH যথাক্রমে ∠DFE ও ∠CFE কোণ দুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: EHFG একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ : $\angle AEF =$ একান্তর $\angle EFD$ [$\because AB \parallel CD$ এবং EF ছেদক]

সুতরাং, $\frac{1}{2}\angle AEF = \frac{1}{2}\angle EFD$

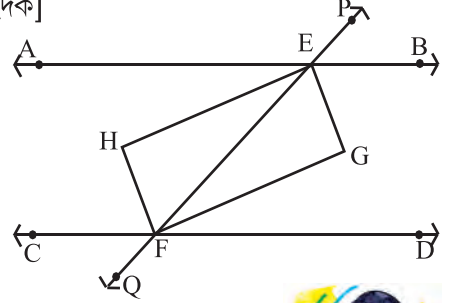
$\therefore \angle HEF = \angle EFG$; কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

$\therefore HE \parallel FG$

অনুরূপে, $HF \parallel GE$

$\therefore$ EHFG একটি সামান্তরিক।

আবার, $\angle HEG = \frac{1}{2}(\angle AEF + \angle BEF) = \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ

$\therefore \angle HEG = 1$ সমকোণ; সুতরাং, EHFG একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রয়োগ : 16 সাব্বা তার খাতায় ABCD কাইট এঁকে AC ও BD কর্ণ দুটি এঁকেছে যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AC, BD -এর উপর লম্ব এবং BO = OD

প্রদত্ত : ABCD কাইটের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: AC, BD-এর উপর লম্ব এবং BO = OD

প্রমাণ : ABCD একটি কাইট যার AB = AD এবং BC = CD

ΔABC ও ΔADC -এর মধ্যে AB = AD; BC = CD এবং AC সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ [সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে]

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

সুতরাং, $\angle BAO = \angle DAO$ ———— (i)

ΔABO ও ΔADO — এর মধ্যে

$AB = AD$; $\angle BAO = \angle DAO$ [(i) থেকে পেলাম]

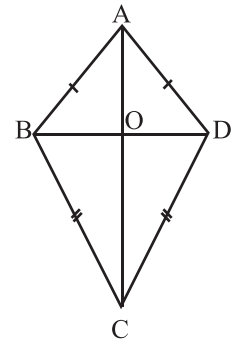
এবং AO সাধারণ বাহু।

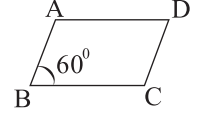
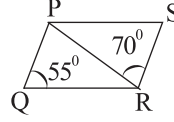
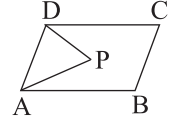
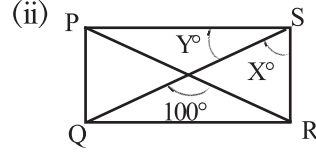
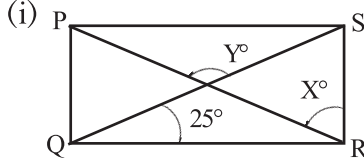
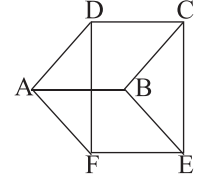
$\therefore \Delta ABO \cong \Delta ADO$ (সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে)

BO = DO (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু) (প্রমাণিত)

আবার, $\angle AOB = \angle AOD$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)

এবং $\angle AOB + \angle AOD = 180°$; সুতরাং, $\angle AOB = \angle AOD = 90°$

$\therefore$ AO, BD এর উপর লম্ব। অর্থাৎ, AC, BD এর উপর লম্ব। (প্রমাণিত)

নিজে করি - 6.1

1. ABCD সামান্তরিকের কোণগুলি হিসাব করে লিখি, যেখানে $\angle B = 60°$

2. পাশের ছবির PQRS সামান্তরিকের $\angle PRQ$ - এর মান হিসাব করে লিখি।

3. পাশের ছবির ABCD সামান্তরিকের AP ও DP যথাক্রমে $\angle BAD$ ও $\angle ADC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক হলে, $\angle APD$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. আমি নীচের PQRS আয়তাকার চিত্রের X ও Y -এর মান হিসাব করে লিখি।

(i)
(ii)
5. পাশের চিত্রে ABCD এবং ABEF দুটি সামান্তরিক। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, CDFE ও একটি সামান্তরিক।

6. ABCD সামান্তরিকের $AB > AD$ হলে, যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\angle BAC < \angle DAC$।

আমরা অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান মাপের রঙিন সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রবিশিষ্ট পিচবোর্ড কেটে তাদের বাহু, কোণ ও কর্ণের মধ্যে সম্পর্ক জেনেছি।

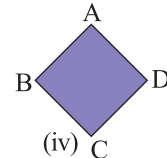
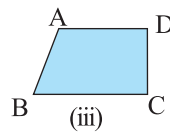
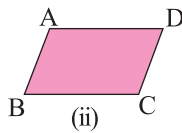
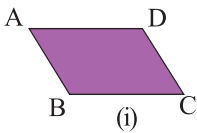
কিন্তু সায়ন্তনের বোন ঝিমলি অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান মাপের রঙিন চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র এঁকেছে এবং কাঁচি দিয়ে কেটে আলাদা করে রেখেছে।

আমি ঝিমলির আঁকা চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রগুলি একটি বড়ো সাদা চার্ট পেপারে আটকে দেয়ালে টাঙিয়ে দিলাম। ঝিমলি এঁকেছে,

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

সায়ন্তন, ঝিমলির আঁকা চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রগুলির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখল (i), (ii) ও (iv) নম্বর চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান। কিন্তু (iii) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান নয়।

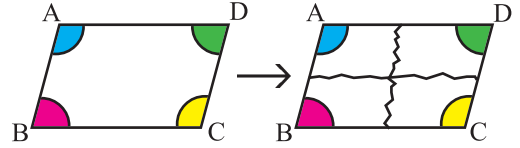
আমরা নানাভাবে হাতেকলমে যাচাই করে দেখেছি যে, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান। কিন্তু এই সকল চতুর্ভুজ যাদের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান, তারা কি সামান্তরিক হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

6 আমি হাতেকলমে প্রথমে বেগুনি রঙের (i) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র কিনা যাচাই করি।

বেগুনি রঙের (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের AB=DC এবং AD=BC

(i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল কিনা যাচাই করি।

হাতেকলমে

(I) আমি প্রথমে (i) নং ABCD চতুর্ভুজের চারটি কোণ রঙিন করলাম ও কেটে নিলাম।

(II) এবার $\angle A$ ও $\angle B$ পাশাপাশি বসিয়ে পেলাম →

দেখছি, $\angle A + \angle B = 180°$

(III) এবার $\angle B$ ও $\angle C$ পাশাপাশি বসিয়ে পেলাম →

দেখছি, $\angle B + \angle C = 180°$

সিদ্ধান্ত : (II) নং থেকে পেলাম, AD ও BC সরলরেখা দুটিকে AB ছেদ করায় অন্তঃস্থ সন্নিহিত কোণ দুটির যোগফল 180° হয়েছে। $\therefore$ AD ∥ BC

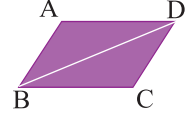
একইভাবে (III) নং থেকে পেলাম AB ∥ DC

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

একইভাবে ঝিমলির আঁকা (ii) , (iii) ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রগুলির বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল কিনা হাতেকলমে কোণগুলির সাহায্যে যাচাই করি।

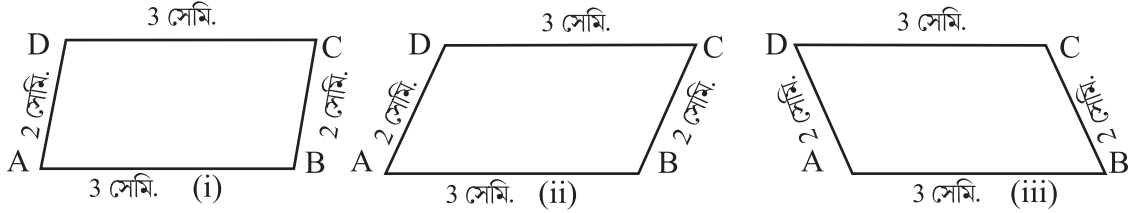
চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য	$\angle A + \angle B$	AD ও BC বাহুর প্রকৃতি	$\angle B + \angle C$	AB ও DC বাহুর প্রকৃতি	সিদ্ধান্ত
(ii) নং গোলাপি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD	AB = DC = ☐ AD = BC = ☐	$\angle A + \angle B$ = ☐	AD ∥ BC	$\angle B + \angle C = 180°$	AB ∥ DC	ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র
(iii) নং আকাশি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD	AB ≠ DC AD ≠ BC	$\angle A + \angle B = 180°$	AD ∥ BC	$\angle B + \angle C \neq 180°$	AB ও DC পরস্পর সমান্তরাল নয়	সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র নয়।
(iv) নং নীল চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(নিজে করি)

সাব্বা (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের একটি কর্ণ BD টানল এবং চাঁদা দিয়ে মেপে একান্তর কোণগুলির মাপ লিখল। চাঁদা দিয়ে মেপে পেলাম, $\angle ADB = \angle DBC$
কিন্তু AD ও BC সরলরেখা দুটিকে BD ছেদ করায় একান্তর কোণদ্বয় $\angle ADB$ ও $\angle DBC$ -এর পরিমাপ সমান হয়েছে। সুতরাং, AD ∥ BC
আবার চাঁদা দিয়ে মেপে দেখেছি, $\angle ABD = \angle CDB$
অর্থাৎ AB ও DC সরলরেখা দুটিকে BD ছেদ করায় একান্তর কোণদ্বয় $\angle ABD$ ও $\angle CDB$ — এর পরিমাপ সমান হয়েছে। সুতরাং AB ∥ DC

ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কর্ণ টেনে এবং একান্তর কোণ মেপে দেখছি AB ∥ DC এবং AD ∥ BC

∴ ABCD একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

আমি একইভাবে (ii), (iii) ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কর্ণ টেনে এবং একান্তর কোণগুলি মেপে দেখছি (ii) নং ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র দুটির প্রত্যেকে সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র। কিন্তু (iii) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র নয়।

আমি ঝিমলির মতো অনেকগুলি চতুর্ভুজ ABCD আঁকলাম যাদের AB=DC=3 সেমি. এবং AD=BC=2 সেমি.

একইভাবে (i), (ii) ও (iii) নং চতুর্ভুজের কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, প্রতিটি চতুর্ভুজ ☐ [নিজে যাচাই করে লিখি]

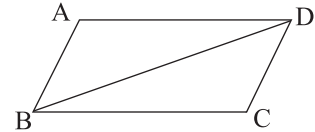
হাতেকলমে পেলাম— **চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 16 কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজের AB=DC এবং AD=BC

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : BD কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCDB -এর মধ্যে, AB=DC; AD=BC [প্রদত্ত] এবং BD সাধারণ বাহু

∴ $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে)

$\angle ADB = \angle CBD$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)

কিন্তু AD ও BC -কে BD ছেদ করায় $\angle ADB =$ একান্তর $\angle CBD$

∴ AD ∥ BC

আবার, $\angle ABD = \angle CDB$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ); কিন্তু এরা একান্তর কোণ

∴ AB ∥ DC

ABCD চতুর্ভুজের AD ∥ BC এবং AB ∥ DC

∴ ABCD একটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হয়— এই উপপাদ্যর বিপরীতে পেলাম "চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে" উপপাদ্যটি। তাই দ্বিতীয় উপপাদ্যটিকে প্রথমটির **বিপরীত উপপাদ্যও** বলা হয়।

প্রয়োগ : 17 ABCD আয়তাকার চিত্রের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির উপর যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুগুলি এমনভাবে অবস্থিত যে AE = CG এবং BF = DH; যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, EFGH একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত : ABCD আয়তাকার চিত্রের AE = CG এবং BF = DH

প্রমাণ করতে হবে যে: EFGH চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : AB = DC, AE = CG

সুতরাং, AB – AE = DC – CG

$\therefore$ BE = DG

ΔDHG ও ΔBEF এর মধ্যে,

DG = EB

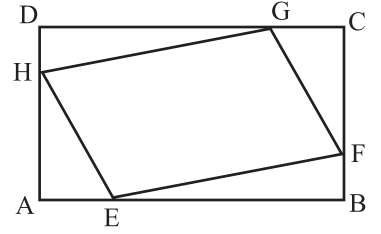
$\angle$GDH = $\angle$EBF = 1 সমকোণ

DH = FB

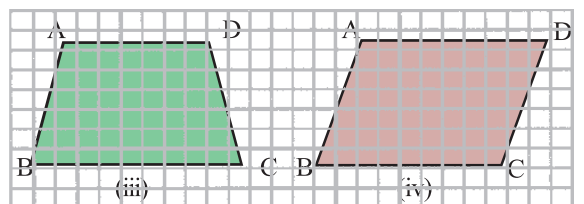
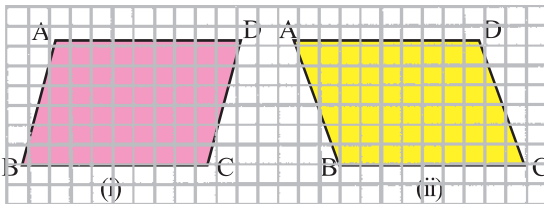
$\therefore$ ΔDHG $\cong$ ΔBEF [সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং HG = EF .... (i)

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, HE = GF .... (ii) ($\because$ Δ AHE $\cong$ Δ CGF)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, EFGH একটি সামান্তরিক।

আমার বন্ধু রহমত ঠিক করেছে এবছরে ইচ্ছামতো হাতের কাজ দেখানোর অনুষ্ঠানে সে পিচবোর্ডের এমন কিছু নতুন ধরনের চতুর্ভুজ তৈরি করবে যাদের বিপরীত কোণগুলি সমান।

তাই সে তার পুরানো ছক আঁকা পিচবোর্ডে অনেকগুলি ছোটো বড়ো রঙিন চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করল যাদের বিপরীত কোণগুলি সমান।

রহমত করল,

আমি চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখি উপরের (i) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি সমান কিনা।

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle$A = $\angle$C = ☐ এবং $\angle$B = $\angle$D = ☐ অর্থাৎ, (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি সমান।

আমরা বিভিন্ন পরীক্ষার মাধ্যমে ও হাতেকলমে যাচাই করে দেখেছি, সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান হয়। কিন্তু কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে কিনা হাতে কলমে যাচাই করি।

হাতে কলমে

আমরা প্রথমে হাতে কলমে পরীক্ষা করে দেখি গোলাপি রঙের (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র কিনা। অর্থাৎ, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল কিনা।

(i) প্রথমে ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কোণগুলি রঙিন করে চারটি কোণ কেটে নিলাম।

(ii) এবার $\angle A$ ও $\angle B$ পাশাপাশি বসিয়ে নীচের ছবির মতো পেলাম।

অর্থাৎ, $\angle A + \angle B = 180^\circ$

পেলাম, AD ও BC সরলরেখাংশকে AB ছেদ করায় একই পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°

$\therefore$ AD || BC

(iii) এবার $\angle B$ ও $\angle C$ পাশাপাশি বসিয়ে পাশের ছবির মতো পেলাম।

অর্থাৎ, $\angle B + \angle C = 180^\circ$

$\therefore$ পেলাম, AB ও DC সরলরেখাংশকে BC ছেদ করায় একই পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°

$\therefore$ AB || DC

$\therefore$ হাতে কলমে পেলাম, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটির বিপরীত কোণ সমান হলে, ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র হবে।

একইভাবে আমি রহমতের আঁকা (ii), (iii) ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কোণগুলি কেটে নিয়ে হাতে কলমে যাচাই করে কী পাই দেখি।

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	বিপরীত কোণের পরিমাপ	$\angle A + \angle B$	AD ও BC বাহুর প্রকৃতি	$\angle B + \angle C$	AB ও DC বাহুর প্রকৃতি	সিদ্ধান্ত
(ii) নং হলুদ রঙের ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	$\angle A = \angle C =$ □ $\angle B = \angle D =$ □	180°	AD || BC	180°	AB || DC	চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র
(iii) নং সবুজ রঙের ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	$\angle A \neq \angle C$ $\angle B \neq \angle D$	180°	AD || BC	$\angle B + \angle C \neq 180^\circ$	AB ও DC পরস্পর সমান্তরাল নয়।	চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র নয়।
(iv) নং বাদামি রঙের ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র						(নিজে করি)

হাতে কলমে দেখছি, চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হলে, চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র হবে।

আমি আরও দুটি চতুর্ভুজ আঁকলাম যাদের বিপরীত কোণগুলি সমান। এবার হাতে কলমে যাচাই করে দেখছি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র দুটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র কিনা। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য: 17 কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত: ABCD চতুর্ভুজের $\angle BAD = \angle BCD$ এবং $\angle ABC = \angle ADC$

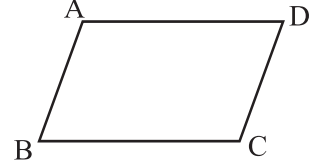
প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: একটি চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণ।

সুতরা, $\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC = 4$ সমকোণ

বা, $\angle BAD + \angle ABC + \angle BAD + \angle ABC = 4$ সমকোণ

বা, $2\,(\angle BAD + \angle ABC) = 4$ সমকোণ

$\therefore\ \angle BAD + \angle ABC = 2$ সমকোণ

যেহেতু, AD ও BC সরলরেখাংশ দুটিকে AB সরলরেখাংশ ছেদ করায় ছেদকের একই পাশে উৎপন্ন অন্তঃস্থ কোণদুটির সমষ্টি 2 সমকোণ, সুতরাং $AD \parallel BC$

একইভাবে প্রমাণ করতে পারি যে, $AB \parallel DC$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 18 প্রমাণ করি যে, কোনো সামান্তরিকের চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর মিলিত হয়ে আয়তাকার চিত্র গঠন করে।

প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিকের $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ ও $\angle ADC$ -এর সমদ্বিখণ্ডকগুলি যথাক্রমে AP, BR, CR ও DP পরস্পর মিলিত হয়ে PQRS চতুর্ভুজ তৈরি করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: PQRS একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের $AB \parallel DC$ এবং AD ভেদক।

$\angle BAD + \angle ADC = 180°$

বা, $\frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ADC = 90°$

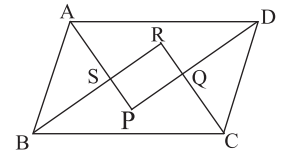
$\therefore\ \angle PAD + \angle PDA = 90°$

সুতরাং, Δ APD -তে, $\angle APD = 180° - 90° = 90°$;

একইভাবে প্রমাণ করা যায়, $\angle BRC = 90°$; $\angle ASB = 90° = \angle RSP$, $\angle CQD = 90° = \angle RQP$

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজের $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ এবং $\angle SRQ = \angle SPQ = 90°$

যেহেতু, PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান, সুতরাং PQRS একটি সামান্তরিক।

আবার , PQRS সামান্তরিকের প্রত্যেক কোণের মান 90°, সুতরাং PQRS একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ করি যে, একটি চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ সমান এবং এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে। [নিজে প্রমাণ করি।]

সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান হয় — এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কী পেলাম লিখি। (নিজে করি)

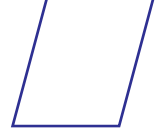
আমরা হাতে কলমে যাচাই করে পেলাম, একটি চতুর্ভুজ নিম্নলিখিত দুটি শর্তে সামান্তরিক হবে।

(i) যদি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হয়।

(ii) যদি চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হয়।

কিন্তু যদি চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীতবাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হয়, তবে কি চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে?

আমাদের বিদ্যালয়ে নবম ও দশম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের বিতর্কসভা হবে।

প্রধানশিক্ষক মহাশয় আমাদের শ্রেণির সহেলীর উপর দায়িত্ব দিলেন বিতর্ক সভায় পক্ষে ও বিপক্ষে যারা অংশগ্রহণ করবে তাদের নামের তালিকা একটি আর্ট পেপারে লিখে নোটিশ বোর্ডে টাঙিয়ে দিতে।

দেখছি, সহেলী সমান দৈর্ঘ্যের 2 টি নীল সুতো নিয়ে আর্ট পেপারের উপরে ও নীচে ধার বরাবর আঠা দিয়ে আটকে নিল। তারপর সে একই ধারের নীল সুতোর দুটো প্রান্ত আর একটা নীল সুতো বসিয়ে আঠা দিয়ে আটকাল এবং অপর ধারদুটোও একইভাবে নীল সুতো দিয়ে আটকে দিল।

চারদিকে নীল সুতোর বর্ডার দিয়ে সে আর্ট পেপারের চারধারের বর্ডার বরাবর আর্ট পেপারটি কাঁচি দিয়ে কেটে উপরের ছবির মতো করল। এরপর বিতর্কসভায় পক্ষে ও বিপক্ষে যারা অংশগ্রহণ করবে তাদের নাম লিখল।

দেখছি আর্ট পেপারের উপর নীচ ধার বরাবর আর্ট পেপারটির দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা সমান্তরাল।

এই ধরনের চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রকে কী বলব?

আমিও একই রকম চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করলাম যার একজোড়া বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা পরস্পর সমান্তরাল।

হাতেকলমে যাচাই করি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি কী ধরনের চতুর্ভুজ।

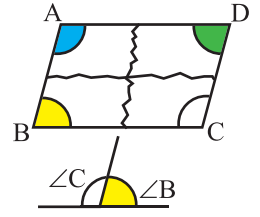
আগের মতো $\angle B$ এবং $\angle C$ কেটে পাশাপাশি বসিয়ে

দেখছি, $\angle B + \angle C = 180°$; অর্থাৎ অপর জোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore AB \parallel DC$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ হাতে কলমে পেলাম, চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য: 18 যে-কোনো চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজের $AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : AC কর্ণ অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔCDA-এর মধ্যে, $AB = DC$ [প্রদত্ত]

$\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$ [$\because AB \parallel DC$ এবং AC ছেদক] এবং AC উহাদের সাধারণ বাহু।

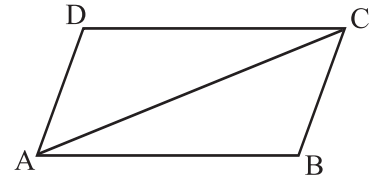
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

সুতরাং, $\angle ACB = \angle DAC$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

কিন্তু BC ও AD সরলরেখাংশকে AC ছেদ করায় দুটি একান্তর কোণ সমান হয়েছে।

$\therefore BC \parallel AD$

যেহেতু, ABCD চতুর্ভুজের $AB \parallel DC$ এবং $BC \parallel AD$,

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

নিজে করি - 6.2

1. ফিরোজ PQRS একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করেছে যার PQ = SR এবং PQ || SR; আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, PQRS একটি সামান্তরিক।
2. সাব্বা এমন দুটি সরলরেখাংশ AD ও BC এঁকেছে যে, AD || BC এবং AD = BC; আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, AB = DC এবং AB || DC.

প্রয়োগ: 19 নীচের ছবির ΔABC ও ΔDEF-এর AB = DE এবং AB || DE, BC = EF এবং BC || EF; ΔABC-এর A,B ও C শীর্ষবিন্দুগুলির সাথে যথাক্রমে ΔDEF-এর D,E ও F শীর্ষবিন্দুগুলি যোগ করলাম। প্রমাণ করি যে, (a) চতুর্ভুজ ABED একটি সামান্তরিক (b) চতুর্ভুজ BEFC একটি সামান্তরিক (c) চতুর্ভুজ ACFD একটি সামান্তরিক এবং (d) ΔABC ≅ ΔDEF

প্রমাণ : (a) চতুর্ভুজ ABED এর AB = DE এবং AB || DE [প্রদত্ত]

∴ চতুর্ভুজ ABED একটি সামান্তরিক

(b) BEFC চতুর্ভুজের BC = ☐ এবং BC || ☐ [প্রদত্ত]

∴ চতুর্ভুজ BEFC একটি সামান্তরিক [নিজে লিখি]

(c) ∵ ABED একটি সামান্তরিক

∴ BE = AD এবং BE || AD ———— (i)

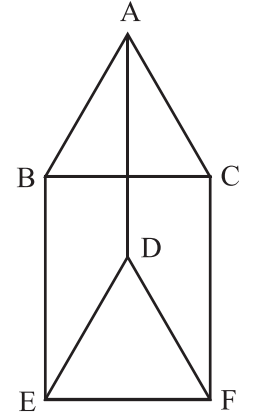
আবার, BEFC একটি সামান্তরিক

∴ BE = CF এবং BE || CF ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, AD || CF এবং AD = CF; ∴ ADFC একটি ☐

(d) ΔABC ও ΔDEF-এর মধ্যে, AB = DE [প্রদত্ত], BC = EF [প্রদত্ত]

এবং AC = DF [∵ ADFC একটি সামান্তরিক]

∴ ΔABC ≅ ΔDEF (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

প্রয়োগ: 20 PQRS একটি সামান্তরিক। A ও B যথাক্রমে PS ও QR-এর মধ্যবিন্দু। P, B; Q, A; R, A এবং B, S যোগ করলাম। PB ও QA পরস্পরকে C বিন্দুতে এবং RA ও BS পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, (a) চতুর্ভুজ AQBS একটি সামান্তরিক (b) চতুর্ভুজ PBRA একটি সামান্তরিক (c) চতুর্ভুজ ACBD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : (a) PQRS একটি সামান্তরিক।

সুতরাং, PS || QR এবং PS = QR

∴ $\frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং, PA = BR এবং AS = QB

∴ AQBS চতুর্ভুজের AS || QB [∵ PS || QR]

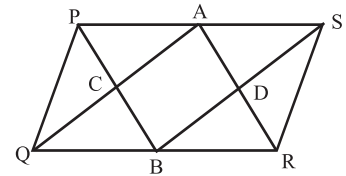
এবং AS = QB

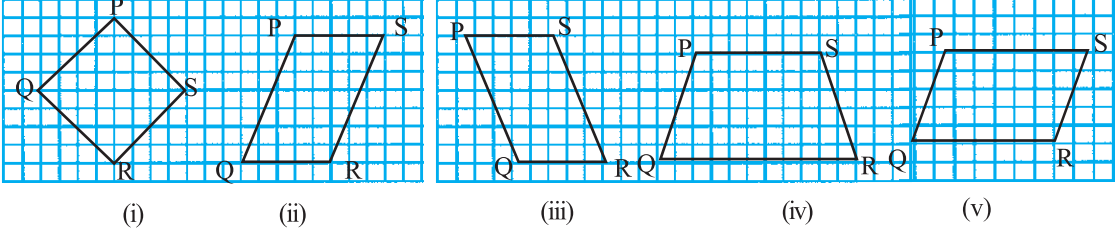
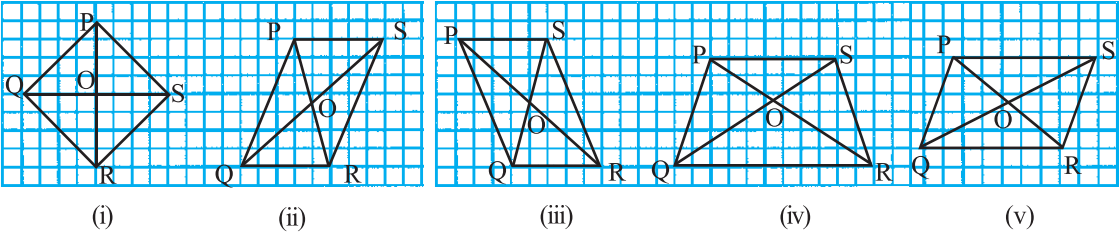
∴ AQBS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(b) একইভাবে প্রমাণ করে পাই, PBRA চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক [নিজে করি]

(c) ACBD চতুর্ভুজের AC || DB [∵ AQBS সামান্তরিক]

BC || DA [∵ PBRA সামান্তরিক]

∴ ACBD একটি সামান্তরিক।

আমরা যখন নিজেদের পিচবোর্ড কেটে নানা ধরনের ও ছোটো-বড়ো মাপের চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করে সামান্তরিকের ধর্ম যাচাই করছি এবং কোন কোন শর্তে চতুর্ভুজগুলি সামান্তরিক হচ্ছে তা দেখার চেষ্টা করছি, তখন সাব্বার ভাই, সালেম তার ছক কাগজে অনেকগুলি চতুর্ভুজ এঁকেছে।

(i) (ii) (iii) (iv) (v)

আমি সালেমের আঁকা PQRS চতুর্ভুজের কর্ণ PR ও QS আঁকলাম। এবার মেপে দেখি কোন চতুর্ভুজের কর্ণগুলি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করছে।

(i) (ii) (iii) (iv) (v)

ছক কাগজের ঘর গুনে দেখছি, (i) নং PQRS চতুর্ভুজের কর্ণ PR ও QS পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং PO = OR = ☐, QO = OS = ☐ অর্থাৎ (i) নং চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

PQRS চতুর্ভুজের চারটি কোণ ($\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ ও $\angle S$) টুকরো করে পাশাপাশি বসিয়ে দেখলাম, $\angle P + \angle Q = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle R = 180^\circ$

সুতরাং, পেলাম PS || QR এবং PQ || SR; অর্থাৎ, PQRS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

আমি (ii), (iii), ও (v) নং চতুর্ভুজগুলির চারটি কোণ ($\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ ও $\angle S$) টুকরো করে পাশাপাশি বসিয়ে দেখলাম, $\angle P + \angle Q = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle R = 180^\circ$

সুতরাং, পেলাম PS || QR এবং PQ || SR; অর্থাৎ, PQRS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(iv) নং চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে নিজে PO, OR, QO, এবং OS এর দৈর্ঘ্য মাপি ও চারটি কোণ টুকরো করে হাতেকলমে সামান্তরিক পেলাম কিনা দেখি। [নিজে করি]

আমি ছক কাগজে যে কোনো চতুর্ভুজ এঁকে একইভাবে হাতে কলমে যাচাই করে পেলাম,

চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য: 19 একটি চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত: ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।
অর্থাৎ, AO = OC এবং BO = OD

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক ।

প্রমাণ : ΔAOD ও ΔBOC-এর মধ্যে, AO = OC

$\angle AOD = \angle BOC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

BO = OD

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ [সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে]

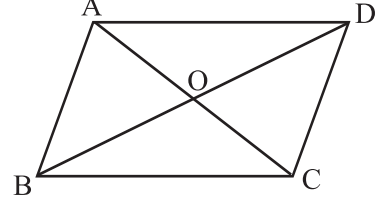
সুতরাং, AD = BC [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

এবং $\angle OAD = \angle OCB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

কিন্তু AD ও BC সরলরেখাংশকে AC ছেদ করার ফলে এই দুটি একান্তর কোণ সমান।

সুতরাং, AD || BC

যেহেতু, ABCD চতুর্ভুজের AD || BC এবং AD = BC,

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। [প্রমাণিত]

উপরের উপপাদ্যটি অর্থাৎ চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।
—এই উপপাদ্যটি কোন উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য লিখি। [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 21 ABCD একটি সামান্তরিক। এই সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AC কর্ণের ওপর P ও R দুটি এমন বিন্দু যাতে AP = CR হয়। প্রমাণ করি যে, চতুর্ভুজ PBRD একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত : (i) ABCD একটি সামান্তরিক।

(ii) AC কর্ণের ওপর P ও R দুটি এমন বিন্দু যেখানে AP = CR

প্রমাণ করতে হবে যে: চতুর্ভুজ PBRD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক, সুতরাং তার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ AO = CO এবং BO = DO.

দেওয়া আছে, AP = CR

সুতরাং, AO – AP = CO – CR

$\therefore$ OP = OR

আবার, BO = OD

সুতরাং, চতুর্ভুজ PBRD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

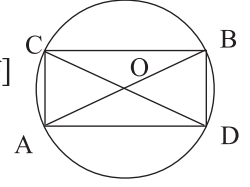
$\therefore$ PBRD একটি সামান্তরিক।

প্রয়োগ : 22 কোনো বৃত্তে AB ও CD দুটি ব্যাস। প্রমাণ করি যে, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি ব্যাস AB ও CD

প্রমাণ করতে হবে যে: ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ : ACBD চতুর্ভুজটির OA = OB এবং OC = OD; [কারণ, OA, OB, OC, OD একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]।
যেহেতু, ACBD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AB ও CD পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে,
সুতরাং, ACBD একটি সামান্তরিক।

Δ ADB ও Δ CBD - তে AB = CD [যেহেতু একই বৃত্তের ব্যাস],
AD = CB [যেহেতু ACBD সামান্তরিকের বিপরীত বাহু] এবং BD সাধারণ বাহু।
$\therefore \Delta ADB \cong \Delta CBD$ [S-S-S সর্বসমতা অনুসারে]
$\therefore \angle ADB = \angle CBD$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]
আবার $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$ [AD||CB এবং DB তাদের ছেদক]
বা, $\angle ADB + \angle ADB = 180^\circ$
বা, $2\angle ADB = 180^\circ \therefore \angle ADB = 90^\circ$
সুতরাং, সামান্তরিক ACBD -এর একটি কোণ সমকোণ।
$\therefore$ আয়তকার চিত্রের সংজ্ঞা থেকে পাই, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র। **(প্রমাণিত)**

প্রয়োগ : 23 ABCD একটি সামান্তরিক। DA ও DC বাহু দুটিকে P ও Q পর্যন্ত এমনভাবে বাড়ানো হলো যাতে AP = DA এবং CQ = DC হয়।

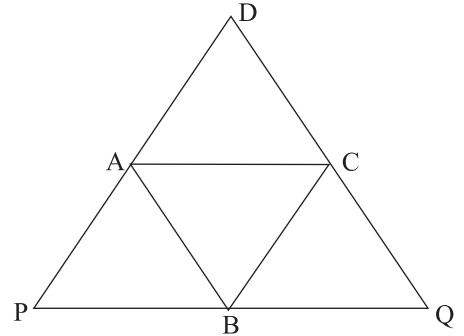
প্রমাণ করি যে, P, B ও Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

প্রদত্ত : i) ABCD একটি সামান্তরিক
ii) AP = DA এবং CQ = DC

প্রমাণ করতে হবে যে: P, B ও Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : P, B; B, Q এবং A, C যুক্ত করলাম।

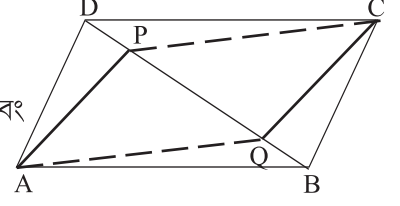
প্রমাণ : যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক,
সুতরাং, DA = CB এবং DA || CB; দেওয়া আছে AP = DA
$\therefore$ AP = CB এবং AP || CB
APBC চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।
সুতরাং, APBC একটি সামান্তরিক। $\therefore$ PB || AC,
অনুরূপভাবে পাই, যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক,
সুতরাং, DC = AB এবং DC || AB; দেওয়া আছে CQ = DC
$\therefore$ CQ = AB এবং CQ || AB; সুতরাং, CABQ একটি সামান্তরিক।
$\therefore$ BQ || AC
যেহেতু, PB || AC এবং BQ || AC $\therefore$ PB || BQ

আবার যেহেতু B বিন্দুটি PB ও BQ দুটি সরলরেখাংশতেই আছে, সুতরাং PB ও BQ একই সরলরেখায় আছে। সুতরাং, P, B ও Q বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

প্রয়োগ : 24 ABCD একটি সামান্তরিক। AP এবং CQ যথাক্রমে শীর্ষবিন্দু A এবং C থেকে কর্ণ BD এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করি যে (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ (ii) $AP = CQ$ এবং (iii) AQCP একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত : (i) ABCD একটি সামান্তরিক।
(ii) $AP \perp BD$ এবং $CQ \perp BD$

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$, (ii) $AP = CQ$ এবং
(iii) AQCP একটি সামান্তরিক

D C P Q A B

প্রমাণ : ΔAPB ও ΔCQD -এর মধ্যে,
$\angle BPA = \angle CQD = 90^\circ$ [যেহেতু $AP \perp BD$ এবং $CQ \perp BD$]
$\angle ABP =$ একান্তর $\angle CDQ$ [$\because$ ABCD সামান্তরিক এবং BD কর্ণ $\therefore DC \parallel AB$ এবং DB ছেদক]
$AB = DC$ [ABCD সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]
$\Delta APB \cong \Delta CQD$ [A-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে][**প্রমাণিত**]
সুতরাং, $AP = CQ$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] [**প্রমাণিত**]
আবার $AP \parallel CQ$ [$\because$ AP ও CQ সরলরেখাংশ দুটিই BD সরল রেখাংশের উপর লম্ব]
সুতরাং, AQCP চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান এবং সমান্তরাল।
$\therefore$ AQCP একটি সামান্তরিক। [**প্রমাণিত**]

কষে দেখি— 6

1. প্রমাণ করি যে , একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে, সামান্তরিকটি একটি আয়তাকার চিত্র।
2. প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, সামান্তরিকটি একটি বর্গাকার চিত্র।
3. প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস।
4. ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখা AB ও DC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে $OP = OQ$
5. প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের যে-কোনো সমান্তরাল বাহুসংলগ্ন দুটি কোণ পরস্পর সমান।
6. ABCD বর্গাকার চিত্রে BC বাহুর উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। B বিন্দু থেকে AP-এর উপর অঙ্কিত লম্ব DC বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AP = BQ$
7. প্রমাণ করি যে, একটি চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সমান ও দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।
8. ΔABC-এর BP ও CQ মধ্যমা দুটি যথাক্রমে R ও S বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $BP = PR$ এবং $CQ = QS$ হয়। প্রমাণ করি যে, S, A, R বিন্দু তিনটি সমরেখ।
9. PQRS সামান্তরিকের SQ কর্ণ K ও L বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়েছে। PK, SR-কে M বিন্দুতে এবং RL, PQ কে N বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, PMRN একটি সামান্তরিক।
10. ABCD ও AECF দুটি সামান্তরিকেরই AC একটি কর্ণ। B, E, D, F বিন্দুগুলি সমরেখ না হলে, প্রমাণ করি যে, BEDF একটি সামান্তরিক।

11. ABCD একটি চতুর্ভুজ। ABCE ও BADF দুটি সামান্তরিক অঙ্কন করা হলো। প্রমাণ করি যে, CD ও EF পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

12. ABCD সামান্তরিকের AB = 2 AD; প্রমাণ করি যে $\angle$ BAD ও $\angle$ ABC -এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় DC বাহুর মধ্যবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়।

13. ABCD সামান্তরিকের AB ও AD বাহুর উপর যথাক্রমে ABPQ ও ADRS বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করা হলো যারা সামান্তরিকটির বাইরে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, PRC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

14. ABCD সামান্তরিকের $\angle$BAD স্থূলকোণ; AB ও AD বাহুর উপর দুটি সমবাহু ত্রিভুজ ABP ও ADQ অঙ্কন করা হলো যারা সামান্তরিকের বাইরে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, CPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

15. OP, OQ ও OR তিনটি সরলরেখাংশ। OPAQ, OQBR এবং ORCP সামান্তরিক তিনটি অঙ্কন করা হলো। প্রমাণ করি যে, AR , BP ও CQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

16. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.):

(i) ABCD সামান্তরিকের $\angle BAD = 75^\circ$ এবং $\angle CBD = 60^\circ$ হলে, $\angle$BDC-এর পরিমাপ

(a) 60° (b) 75° (c) 45° (d) 50°

(ii) নিম্নলিখিত জ্যামিতিক চিত্রগুলির কোনটির কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান তা লিখি।

(a) সামান্তরিক (b) রম্বস (c) ট্রাপিজিয়াম (d) আয়তাকার চিত্র

(iii) ABCD সামান্তরিকের $\angle BAD = \angle ABC$ হলে, ABCD সামান্তরিকটি

(a) রম্বস (b) ট্রাপিজিয়াম (c) আয়তাকার চিত্র (d) কোনোটিই নয়

(iv) ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণের মধ্যবিন্দু M; BM, $\angle$ABC -কে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, $\angle$AMB এর পরিমাপ

(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 75°

(v) ABCD রম্বসের $\angle ACB=40^\circ$ হলে, $\angle$ADB - এর পরিমাপ

(a) 50° (b) 110° (c) 90° (d) 120°

17. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) ABCD সামান্তরিকের $\angle A : \angle B = 3:2$ হলে, সামান্তরিকটির কোণগুলির পরিমাপ লিখি।

(ii) ABCD সামান্তরিকের $\angle$A ও $\angle$B-এর সমদ্বিখণ্ডদ্বয় CD বাহুর উপর E বিন্দুতে মিলিত হয়। BC বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সেমি. হলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) ABCD বর্গাকার চিত্রের ভিতর সমবাহু ত্রিভুজ AOB অবস্থিত। $\angle$COD -এর পরিমাপ লিখি।

(iv) ABCD বর্গাকার চিত্রের AD বাহুর উপর M একটি বিন্দু যাতে $\angle CMD = 30^\circ$ হয়। কর্ণ BD, CM-কে P বিন্দুতে ছেদ করলে, $\angle$ DPC-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

(v) ABCD রম্বসের AB বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি. এবং $\angle BCD = 60^\circ$ হলে, কর্ণ BD -এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

7 বহুপদী সংখ্যামালা
(POLYNOMIAL)

আমাদের স্কুলে বৃক্ষরোপণ উৎসব পালন করা হবে। এবছরে আমরা ঠিক করেছি নিজেরা কার্ড তৈরি করে ওই দিনের উৎসবে বিশিষ্ট অতিথিদের আমন্ত্রণ জানাব।

তাই আর্টপেপার, রং পেনসিল, আঠা, রঙিন কাগজ ইত্যাদি কেনার জন্য আমরা প্রত্যেকে 5 টাকা করে দেবো।
আমরা 18 জনের প্রত্যেকে 5 টাকা করে দিলে আমাদের মোট 18×5 টাকা = ☐ টাকা উঠবে।

1 কিন্তু আমাদের এই কাজে আরও কিছুজন যোগ দেবে। সেক্ষেত্রে কত টাকা উঠবে হিসাব করি।

যদি এই কাজে মোট x জন যোগ দেয় ও প্রত্যেকে 5 টাকা করে দিলে মোট $5 \times x$ টাকা = $5x$ টাকা উঠবে।

$5x$ এ 5 ধ্রুবক (Constant)এবং x চল (Variable)।

আমরা অনেকগুলি নানারঙের বর্গক্ষেত্রাকার ও আয়তক্ষেত্রাকার ছোটো বড়ো কার্ড তৈরি করেছি। রিয়া মেপে দেখল, নীল রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.।

∴ ওই নীল রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা 4×8 সেমি.।

আবার, ফিরোজ অন্য একটি সবুজ রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ড মেপে দেখল, প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

∴ ওই সবুজ রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা 4×6 সেমি.।

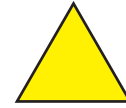
অর্থাৎ, যদি বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x সেমি. হয়, তবে সেই বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা হবে $4x$ সেমি.।

$4x$ এ 4 ধ্রুবক এবং x চল।

জেনিফা আবার কিছু কার্ড তৈরি করেছে যেগুলি আবার ত্রিভুজাকারক্ষেত্র। মেপে দেখছি, জেনিফার তৈরি এই ত্রিভুজ ক্ষেত্রাকার কার্ডের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। অর্থাৎ কার্ডটি সমবাহু ত্রিভুজাকারক্ষেত্র।

∴ এই সমবাহু ত্রিভুজ ক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা 3×6 সেমি.।

সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x একক হলে, পরিসীমা হবে $3x$ একক।

$3x$-এ 3 ধ্রুবক এবং x চল।

2 $5x, 4x, 3x$ এগুলি কী?

$5x, 4x, 3x$ এগুলি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা [Algebraic Expression]। এদের চল x এবং 5,4,3 ধ্রুবক।

সাধারণত চলকে $x, y, z,$ .... দিয়ে এবং ধ্রুবককে a, b, c .... দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

চল ও ধ্রুবক ইংরাজি বর্ণমালার বর্ণ দিয়ে বোঝানো হলেও একই পরিস্থিতিতে ধ্রুবকের মান একই থাকে, কিন্তু চলের মানের পরিবর্তন হতে পারে।

[যেমন, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $4x$ একক। এখানে x একক (বাহুর দৈর্ঘ্য) পরিবর্তিত হতে পারে কিন্তু 4 অপরিবর্তিত থাকে]

বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x একক হলে, ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একক।

3 x^2 কি একটি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা?

x^2 একটি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা। একে x-এর দ্বিঘাত বলা হয়। x^2-এ নিধান x ও সূচক 2

4 বৃক্ষরোপণ উৎসবের দিন অনেকগুলি চারাগাছ নিয়ে এসেছি। আমরা ছাত্রছাত্রীরা কিছু চারাগাছ রোপণ করব। আমি ও সুমিত ঠিক করেছি x টি সারিতে কিছু ফুলের চারাগাছ রোপণ করব। মেহের ও সাহেব আমাদের ঠিক করা x টি সারির প্রতি সারিতে x টি ফুলের চারাগাছ লাগাল। কিন্তু এখনও 8টি ফুলের চারাগাছ পড়ে আছে। আমি ওই বাকি 8টি ফুলের চারাগাছ বাগানের অন্য জায়গায় রোপণ করলাম। হিসাব করে দেখি আমরা মোট কতগুলি ফুলের চারাগাছ লাগিয়েছি।

আমরা মোট (x^2+8) টি ফুলের চারাগাছ লাগিয়েছি।

x^2+8 কি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা?

x^2, x^2+8, x^2-5x+2, x^3+x^2-x+1-এগুলি সবই বীজগাণিতিক সংখ্যামালা যাদের চলের সূচকগুলি অখণ্ড সংখ্যা।

5 এইরকম বীজগাণিতিক সংখ্যামালা যাদের চলের সূচকগুলি অখণ্ড সংখ্যা। এদের কী বলা হয়?

সকল বীজগাণিতিক সংখ্যামালা যাদের চলের সূচক অখণ্ড সংখ্যা তাদের **বহুপদী সংখ্যামালা (polynomials)** বলা হয়।

x^2, x^2+8, x^2-5x+2, x^3+x^2-x+1, $5x$, $4x$, $3x$ এরা সকলেই বহুপদী সংখ্যামালা যাদের চল x; অর্থাৎ এরা সকলেই এক চল বিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা।

6 x^2+8 এই বহুপদী সংখ্যামালার x^2 এবং 8 কে কী বলা হয়?

x^2, 8 কে x^2+8 এই বহুপদী **সংখ্যামালার পদ** বলা হয়।

x^2+8 বহুপদী সংখ্যামালার পদ ☐ টি [2/3]।

$\therefore$ x^2+8 একটি **দ্বিপদী সংখ্যামালা (Binomial)**

$5x$, $4x$, $3x$ এদের **একপদী সংখ্যামালা (Monomial)** বলা হয়।

x^2-5x+2 এটিকে **ত্রিপদী সংখ্যামালা (Trinomial)** বলা হয়।

x^2-5x+2 বহুপদী সংখ্যামালার পদগুলি হলো x^2, $-5x$ ও 2

এবং x^3+x^2-x+1 বহুপদী সংখ্যামালার পদগুলি হলো ☐, ☐, ☐ ও ☐ [নিজে লিখি]

একটি বহুপদী সংখ্যামালার প্রতিটি পদে একটি সহগ (Coefficient) থাকে।

x^2-5x+2 বহুপদী সংখ্যামালাকে লিখতে পারি, $1.x^2+(-5)x+2.x^0$ [$\because x^0=1$, যেখানে $x \neq 0$]

$\therefore$ x^2-5x+2 বহুপদী সংখ্যামালার x^2-এর সহগ 1, x-এর সহগ -5 এবং x^0-এর সহগ 2

x^3+x^2-x+1 বহুপদী সংখ্যামালায় x এর সহগ ☐ [1/–1] এবং x^0 -এর সহগ ☐

7 8,1, –5, 10, 0 এরাও কি বহুপদী সংখ্যামালা?

8,1, –5, 10, 0 এরা ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যামালা (Constant Polynomials)

কিন্তু 0 (শূন্য) -কে শূন্য বহুপদী সংখ্যামালা (Zero Polynomial) বলা হয়।

বহুপদী সংখ্যামালাকে চল অনুযায়ী সাধারণত p(x), q(y), r(x,y) ইত্যাদি দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

যেমন, $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$q(y) = y^2 + 5y$

$r(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$ ইত্যাদি।

8 আমরা মোট (x^2+8) টি চারাগাছ লাগিয়েছি। কিন্তু শিক্ষক-শিক্ষিকারা এবং অতিথিরা লাগিয়েছেন যথাক্রমে $(3x^2+2x+5)$ টি এবং (x^3+1) টি চারাগাছ। আমরা সবাই মিলে মোট কতগুলি চারাগাছ লাগিয়েছি হিসাব করে লিখি।

ধরি, $f(x) = x^2+8$, $g(x) = 3x^2+2x+5$ এবং $p(x) = x^3+1$

$\therefore \quad f(x) + g(x) + p(x) = (x^2+8) + (3x^2+2x+5) + (x^3+1)$

$= x^3 + (x^2+3x^2) + 2x + (8+5+1)$

$= x^3+4x^2+2x+14$

আমরা সবাই মিলে মোট $(x^3+4x^2+2x+14)$ টি চারাগাছ লাগিয়েছি।

∴ বহুপদী সংখ্যামালাদের সমষ্টি বহুপদী সংখ্যামালা পেলাম।

9 আমি $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 9$ ও $q(y) = 2y^2 + 3y + 1$ যোগ করি।

$f(x) + q(y) = (3x^3 + 2x^2 + 9) + (2y^2 + 3y + 1) = 3x^3 + 2x^2 + 2y^2 + 3y + 10$

আবার বহুপদী সংখ্যামালাদের সমষ্টি বহুপদী সংখ্যামালা পেলাম।

10 আমি যে কোনো বহুপদী সংখ্যামালাদের যোগ করে দেখছি, বহুপদী সংখ্যামালাদের সমষ্টি বহুপদী সংখ্যামালা। দুটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখে যোগ করি। [নিজে করি]

11 $g(x)=3x^2+2x+5$ এবং $f(x)=x^2+8$ দুটি বহুপদী সংখ্যামালার বিয়োগফল বহুপদী সংখ্যামালা হবে কিনা হিসাব করে দেখি।

$g(x) - f(x) = (3x^2 + 2x + 5) - (x^2 + 8)$

$= 3x^2 - x^2 + 2x + 5 - 8 = 2x^2 + 2x - 3$

∴ দুটি বহুপদী সংখ্যামালার বিয়োগফলও বহুপদী সংখ্যামালা পেলাম।

12 আমি যে কোনো দুটি বহুপদী সংখ্যামালা বিয়োগ করে দেখছি, বহুপদী সংখ্যামালার বিয়োগফল বহুপদী সংখ্যামালা হবে। দুটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখে বিয়োগ করি। [নিজে করি]

13 আমি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ও $q(x) = x^2 - 2x - 3$ বহুপদী সংখ্যামালা দুটি গুণ করি।

$f(x) \cdot q(x) = (x^2+2x+3) \cdot (x^2-2x-3)$

$= x^2 (x^2-2x-3) + 2x (x^2-2x-3) + 3 (x^2-2x-3)$

$= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3x^2 - 6x - 9 = x^4 - 4x^2 - 12x - 9$

সুতরাং বহুপদী সংখ্যামালাদের গুণফল বহুপদী সংখ্যামালা হবে। নিজে দুটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখে গুণ করি।

নিজে করি—7.1

1. যদি $f(x) = x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 6$, $h(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7$, $g(x) = x + 1$, $p(x) = x^4 - x^2 + 2$ এবং $q(y) = 7y^3 - y + 10$

হলে, নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি কী হবে হিসাব করে লিখি।

(i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) - h(x)$ (iii) $f(x) - p(x)$
(iv) $f(x) + p(x)$ (v) $p(x) + g(x) + f(x)$ (vi) $p(x) - q(y)$
(vii) $f(x) \cdot g(x)$ (viii) $p(x) \cdot g(x)$

আজ সাহানা ও সোহম শ্রেণিকক্ষের ব্ল্যাকবোর্ডে অনেকগুলি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা লিখেছে। সেগুলি হলো,

$5x^2 + 3x - 8$, $y^3 + 2y^2 - 5$, $z^{16} + 5z^7 + 6$, $x + \frac{1}{x}$,
$u + \sqrt[3]{u}$, $7 - v + v^3 + v^7$, $\sqrt{x} + x$, $x^4 + y^2 + 4xy$,
$u + v + 6uv$, $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

সাহানা ও সোহমের লেখা সকল বীজগাণিতিক সংখ্যামালাই কি বহুপদী সংখ্যামালা? বীজগাণিতিক সংখ্যামালার চলের সূচক দেখে বহুপদী সংখ্যামালাগুলি লিখি।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$, $g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$, $f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$, $f(x,y) = x^4 + y^2 + 4xy$,
$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$, $S(u,v) = u + v + 6uv$, $t(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(i) $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ (ii) $u + \sqrt[3]{u} = u + u^{1/3}$ এবং (iii) $\sqrt{x} + x = x^{1/2} + x$

(i), (ii) ও (iii) নং বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির চলের সূচক অখণ্ড সংখ্যা নয় [অর্থাৎ শূন্য বা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়] তাই $x + \frac{1}{x}$, $u + \sqrt[3]{u}$ ও $\sqrt{x} + x$ -এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলি বহুপদী সংখ্যামালা নয়।

14 আমি 4 টি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা লিখি যাদের মধ্যে 2টি বহুপদী সংখ্যামালা এবং অপরদুটি বহুপদী সংখ্যামালা নয়। [নিজে করি]

15 আমি বোর্ডে লেখা বহুপদী সংখ্যামালার পদসংখ্যা লিখি এবং তিনটি বহুপদী সংখ্যামালার সর্বোচ্চঘাতের চলের সূচক খুঁজে লিখি।

বহুপদী সংখ্যামালা	পদসংখ্যা	সর্বোচ্চ ঘাতের চলের সূচকের মান
$P(x) = 5x^2+3x-8$	3	2
$f(y) = y^3+2y^2-5$	☐	3
$q(z) = z^{16}+5z^7+6$	☐	☐
$g(v) = 7-v+v^3+v^7$	4	7
$t(x) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$	☐	☐

কোনো বহুপদী সংখ্যামালার সর্বোচ্চ ঘাতের চলের সূচককে ওই বহুপদী সংখ্যামালার কী বলা হয়?

তাকে বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা (Degree) বলা হয়।

$p(x) = 5x^2+3x-8$ বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 2
আবার, $q(z) = z^{16}+5z^7+6$ -এর মাত্রা 16
$\therefore$ f (y), g(v), ও t(x) -এর মাত্রাগুলি যথাক্রমে ☐, ☐ ও ☐ [নিজে লিখি]

16 শূন্য ছাড়া যে কোনো ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা কত?

শূন্য ছাড়া যে কোনো ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 0; যেমন, $5 = 5.x^0$, $-7 = -7.x^0$

কিন্তু শূন্য বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা অসংজ্ঞাত। যেহেতু, $0 = 0.x^0$, $0 = 0.x^2$

17 আমি 5টি বহুপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 1

(i) $5x + 2$ (ii) $y + \sqrt{7}$ (iii) $8-3x$ (iv) ☐ (নিজে লিখি) (v) ☐ [নিজে লিখি]

যে বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 1 তাদের চল সর্বোচ্চ এক ঘাতের হয়। এই সব বহুপদী সংখ্যামালাকে কি একঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বলা হয়?

যে সকল বহুপদী সংখ্যামালার চল সর্বোচ্চ এক ঘাতের হয় তাদের **একঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বা রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা** বলা হয়।

উপরের $5x + 2$, $y + \sqrt{7}$, $8-3x$, ☐, ☐ সকলেই একঘাত বহুপদী সংখ্যামালা।

x চলের একঘাত বহুপদী সংখ্যামালার বা রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণ রূপ $ax+b$

[a,b ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

y চলের একঘাত বহুপদী সংখ্যামালার বা রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণ রূপ ☐

[a,b ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

সোহমও বোর্ডে কতকগুলি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল।

$x^2 + 9$, $2 + x - x^2$, $2x^2 - 7x + 1$, $4y^2 + \sqrt{2}$, $y^2 - \frac{1}{2}$, $z^2 - 4z$

সোহমের লেখা বহুপদী সংখ্যামালাগুলির মাত্রা ☐; অর্থাৎ, এই বহুপদী সংখ্যামালার চল সর্বোচ্চ দুই ঘাতের।০..

অর্থাৎ, বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 2

18 এই সব বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে কি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বলা হয়?

$x^2 + 9$, $2+x-x^2$, $2x^2-7x+1$, $4y^2 + \sqrt{2}$, $y^2 - \frac{1}{2}$, $z^2 - 4z$ —এরা সকলেই দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা।

x চলের দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণরূপ ax^2+bx+c [a,b,c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

19 আমি পাঁচটি ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা নীচে লিখি।

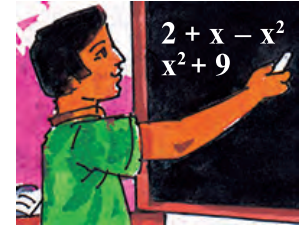
(i) $9x^3 + 1$ (ii) $x^3 + x^2 + x + 1$ (iii) $3 - 2x - 3x^3$ (iv) ☐ নিজে লিখি। (v) ☐ নিজে লিখি।

x চলের ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণরূপ ax^3+bx^2+cx+d [যেখানে a,b,c,d ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

n ঘাতযুক্ত একচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা হবে $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

যেখানে a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_1, a_0 ধ্রুবক এবং $a_n \neq 0$

এই বহুপদী সংখ্যামালার পদ ☐ টি এবং মাত্রা ☐

যদি, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ (সব ধ্রুবকের মান শূন্য) হয় তখন পাই শূন্য বহুপদী সংখ্যামালা।

20 শূন্য বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা ☐ (নিজে লিখি)

আবার $f(x, y) = x^4+y^2+4xy$ বহুপদী সংখ্যামালার চল ☐ [1/2]টি।
$\therefore f(x, y)$ দুই চলের বহুপদী সংখ্যামালা।

কিন্তু একাধিক চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা কীভাবে পাব?

একাধিক চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রতিটি পদের চলের সূচকগুলি যোগ করা হয় এবং সূচকের সর্বোচ্চ যোগফলই ওই বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা।

$\therefore f(x, y) = x^4 + y^2 + 4xy$ -এর মাত্রা 4

আবার $s(u,v) = u + v + 6uv$ -এই বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 2

21 আমি নীচের একাধিক চলের বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা লিখি।

(i) $2x^2 + 4y^2 + 3x^2y^2$ (ii) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (iii) a^2+b^2+2ab (নিজে করি)

22 নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালার মধ্যে কোনগুলি বহুপদী সংখ্যামালা লিখি এবং ওই বহুপদী সংখ্যামালাগুলির প্রত্যেকটির মাত্রা লিখি।

(i) $x^4 + 11x - 9$ (ii) $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ (iii) $\sqrt{y} + 4y$ (iv) 0 (v) $z + \frac{1}{z} + 2$ (vi) 13

(i) $x^4 + 11x - 9$ একটি বহুপদী সংখ্যামালা। কারণ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চল x-এর সূচক সংখ্যা অখণ্ড। যেহেতু x-এর সর্বোচ্চ সূচক 4, সুতরাং $x^4 + 11x - 9$-এর মাত্রা 4

(ii) $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ একটি বহুপদী সংখ্যামালা। কারণ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চল y-এর সূচক অখণ্ড সংখ্যা। যেহেতু y-এর সর্বোচ্চ সূচক ☐, সুতরাং $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ -এর মাত্রা 3

(iii) $\sqrt{y} + 4y$ বহুপদী সংখ্যামালা নয়। কারণ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চল y-এর একটি পদের সূচক ভগ্নাংশ। ($\because \sqrt{y} = y^{1/2}$)

(iv) 0 একটি শূন্য বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা ☐ [নিজে লিখি]

(v) ও (vi) নিজে করি

23 আমি একটি একচলবিশিষ্ট ত্রিপদী সংখ্যামালা লিখি যার মাত্রা 25

একটি একচলবিশিষ্ট ত্রিপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 25 সেটি হলো $2x^{25} + 5x^{10} + 9$

24 আমি একটি একচলবিশিষ্ট একপদী সংখ্যামালা লিখি যার মাত্রা 8

$-5x^8$ একটি একচলবিশিষ্ট একপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 8

25 আমি একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিপদী সংখ্যামালা লিখি যার মাত্রা 7

$2x^7+3x$ একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 7

26 আমি একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদীসংখ্যামালা এবং একটি ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা লিখি।

একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদীসংখ্যামালা হলো $9y^2 + 7y + 8$

একটি একচলবিশিষ্ট ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা হলো $2x^3 - 11x^2 + 3x$

27 আমি $5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ এই বহুপদী সংখ্যামালার x^3, x ও x^0-এদের সহগ লিখি।

$5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ বহুপদী সংখ্যামালার x^3-এর সহগ (–2), x-এর সহগ ☐ এবং x^0-এর সহগ 3

কষে দেখি— 7.1

1. নীচের কোন কোন ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলি বহুপদী সংখ্যামালা লিখি। যেগুলি বহুপদী সংখ্যামালা তাদের প্রত্যেকের মাত্রা লিখি।

(i) $2x^6 - 4x^5 + 7x^2 + 3$ (ii) $x^{-2} + 2x^{-1} + 4$ (iii) $y^3 - \frac{3}{4}y + \sqrt{7}$ (iv) $\frac{1}{x} - x + 2$
(v) $x^{51} - 1$ (vi) $\sqrt[3]{t} + \frac{t}{27}$ (vii) 15 (viii) 0
(ix) $z + \frac{3}{z} + 2$ (x) $y^3 + 4$ (xi) $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2}x + 2$

2. নীচের বহুপদী সংখ্যামালার মধ্যে কোনটি একচলবিশিষ্ট একঘাত সংখ্যামালা, কোনটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সংখ্যামালা এবং কোনটি একচলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সংখ্যামালা লিখি।

(i) $2x + 17$ (ii) $x^3 + x^2 + x + 1$ (iii) $-3 + 2y^2 + 5xy$
(iv) $5 - x - x^3$ (v) $\sqrt{2} + t - t^2$ (vi) $\sqrt{5}\,x$

3. নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির নির্দেশ অনুযায়ী সহগ লিখি।

(i) $5x^3 - 13x^2 + 2$ -এর x^3-এর সহগ (ii) $x^2 - x + \ \ 2$ -এর x-এর সহগ
(iii) $8x - 19$ -এর x^2-এর সহগ (iv) $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}\,x + x^2$ -এর x^0-এর সহগ

4. আমি নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির প্রত্যেকটির মাত্রা লিখি।

(i) $x^4 + 2x^3 + x^2 + x$ (ii) $7x - 5$ (iii) 16 (iv) $2 - y - y^3$ (v) 7t (vi) $5 - x^2 + x^{19}$

5. আমি দুটি আলাদা একচলবিশিষ্ট দ্বিপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 17

6. আমি দুটি আলাদা একচলবিশিষ্ট একপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 4

7. আমি দুটি আলাদা একচলবিশিষ্ট ত্রিপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 3

8. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির মধ্যে কোনগুলি একচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা, কোনগুলি দুইচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা এবং কোনগুলি বহুপদীসংখ্যামালা নয় তা লিখি।

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 + y^2 + a^2$ (iii) $y^2 - 4ax$ (iv) $x + \ \ y + 2$ (v) $x^8 + y^4 + x^5y^9$
(vi) $x + \frac{5}{x}$

সাহানা ও সোহম ব্ল্যাকবোর্ডে যে বহুপদী সংখ্যামালাগুলি লিখেছিল আমরা সব বন্ধুরা সেগুলি খাতায় লিখে নিয়েছি। আমরা এই বহুপদী সংখ্যামালাগুলি নিয়ে এক মজার খেলা খেলব।

আমরা প্রত্যেকে চলের এক একটি মান বলব এবং চলের ওই নির্দিষ্ট মান অনুযায়ী বহুপদী সংখ্যামালাগুলির মান নির্ণয়ের চেষ্টা করবো।

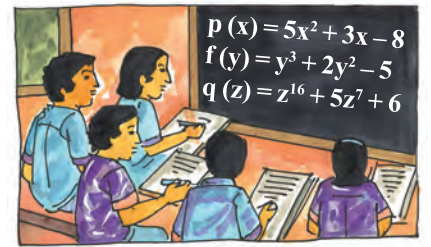
আমি বললাম, $x = 2$

28 $x = 2$ -এর জন্য $p(x) = 5x^2 + 3x - 8$ -এর মান নির্ণয় করি।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$

$x = 2$ বসিয়ে পাই, $p(2) = 5(2)^2 + 3 \times 2 - 8$
$= 20 + 6 - 8 = 18$

আমরা প্রত্যেকেই $p(2) = 18$ পেলাম।

এবার, ফিরোজ বলল, $y = 1$

29 $y = 1$ -এর জন্য $f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$ -এর মান নির্ণয় করি।

$f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$

$y = 1$ বসিয়ে পাই, $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 5 = -2$

30 এবার $z = -1$ -এর জন্য $q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$ -এর মান নির্ণয় করি।

$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$

$q(-1) = (-1)^{16} + 5(-1)^7 + 6 = 1 - 5 + 6 = \square$ [নিজে লিখি]

31 এবার $v = -2$ -এর জন্য $g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$ -এর মান নিজে হিসাব করে লিখি।

32 এবার আমরা $P(x) = 5x^2 + 3x - 8$ -এর মান নির্ণয় করি যখন $x = 1$

$P(1) = 5(1)^2 + 3.1 - 8 = 0$

দেখছি, $P(1) = 0$ পেলাম। অর্থাৎ $x = 1$ -এর জন্য $P(x)$ এর মান 0 পেলাম। একে কী বলব?

যেহেতু, $x = 1$ এর জন্য $P(x) = 5x^2 + 3x - 8$ এর মান 0

সুতরাং, 1 কে $P(x)$ **বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য** বলা হয়।

একটি সংখ্যা c কে $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য বলা হবে যদি $f(c) = 0$ হয়।

33 $f(x) = 8 - x$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কী হবে হিসাব করি।

$f(1) = 8 - 1 = 7$

$f(2) = 8 - 2 = 6$

....

$f(8) = 8 - 8 = 0$

$\therefore$ $x = 8$ -এর জন্য $f(x)$ -এর মান 0 হবে।

$\therefore$ 8, $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

34 $g(x) = 2x + 16$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কী হবে খুঁজি।

$g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য নির্ণয়ের জন্য x-এর কোন মানের জন্য $g(x)$ -এর মান 0 হবে দেখি।

$$2x + 16 = 0$$

বা, $2x = -16$

$\therefore$ $x = -8$

সুতরাং, $x = -8$ -এর জন্য $g(x)$ এর মান 0 হবে।

$\therefore$ -8, $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

সহজে $g(x) = 0$ সমাধান করে $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য পেলাম। কিন্তু $g(x) = 0$ কে কী বলা হয়?

$g(x) = 0$ কে বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণ বলা হয় এবং $x = -8$, $g(x) = 0$ বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণের বীজ।

তাই বলা হয়, -8, $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

অথবা, -8, $g(x) = 0$ বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণের বীজ।

35 এবার, 4 -এই ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যার শূন্য কী হবে দেখি।

4 -এই ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যার কোনো শূন্য নেই। কারণ 4 অর্থাৎ $4 \cdot x^0$ তে x-এর পরিবর্তে কোনো সংখ্যা বসিয়ে শূন্য পাব না।

∴ শূন্য নয় এমন কোনো ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যার শূন্য নেই।

কিন্তু শূন্য বহুপদী সংখ্যার শূন্য কী হবে?

প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাই শূন্য বহুপদী সংখ্যার শূন্য। কারণ 0-কে লেখা যায় $0 \cdot x^5$; x-এর পরিবর্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা বসালে $0 \cdot x^5$-এর মান শূন্য হবে যেমন, $0.0^5 = 0$, $0.3^5 = 0$, $0.(\frac{4}{5})^5 = 0$ ইত্যাদি। কিন্তু $0.x^0$-এর ক্ষেত্রে $x \neq 0$ বসাতে হবে। কারণ, 0^0 অসংজ্ঞাত।

36 নীচের ছকটি দেখি ও কোনটি বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হবে হিসাব করে লিখি ।

বহুপদী সংখ্যামালা	বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য
$x - 5$	1, 5, 9, –2
$10 - 5x$	7, 0, 1, 2
$2y + 2$	0 , 1, –1, 2
$5z$	5, 1, 0, 2

x -এর কোন মানের জন্য $x - 5 = 0$ হবে দেখি।

$$x - 5 = 0$$
$$\therefore x = 5$$

∴ 5, $x - 5$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

$10 - 5x$, $2y + 2$ ও $5z$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

দেখছি, উপরের সব রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য একটি মাত্র সংখ্যা।

37 আমি $f(x) = ax + b$ [a, b, ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কী হবে হিসাব করি।

$$f(x) = ax + b = 0$$
$$\therefore x = -\frac{b}{a}$$

∴ দেখছি, $x = -\frac{b}{a}$, f (x) রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার একমাত্র শূন্য।

পেলাম, একটি রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার কেবলমাত্র একটিই শূন্য থাকে।

38 একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা $q(x) = x^2 - 4$-এর শূন্য কী হবে হিসাব করে লিখি।

$q(x) = x^2 - 4$ -এ $x = 2$ বসিয়ে পাই, $q(2) = 2^2 - 4 = 0$

$q(x) = x^2 - 4$ -এ $x = -2$ বসিয়ে পাই, $q(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$

∴ 2 ও –2 দুটিই $q(x) = x^2 - 4$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

কী কী পেলাম লিখি

(i) একটি বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য, সর্বদা শূন্য নাও হতে পারে।
(ii) 0 একটি বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হতেও পারে।
(iii) প্রতিটি রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার একটি এবং কেবলমাত্র একটি শূন্য থাকবে।
(iv) একটি বহুপদী সংখ্যামালার একাধিক শূন্য থাকতে পারে।

কষে দেখি 7.2

1. যদি $f(x) = x^2 + 9x - 6$ হয়, তাহলে $f(0)$, $f(1)$ ও $f(3)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

2. **নীচের বহুপদী সংখ্যামালা $f(x)$ -এর $f(1)$ ও $f(-1)$ -এর মান হিসাব করে লিখি :**

   (i) $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 4$ (ii) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 8$

   (iii) $f(x) = 4 + 3x - x^3 + 5x^6$ (iv) $f(x) = 6 + 10x - 7x^2$

3. **নীচের বিবৃতিগুলি যাচাই করি :**

   (i) $P(x) = x - 1$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 1

   (ii) $P(x) = 3 - x$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 3

   (iii) $P(x) = 5x + 1$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য $-\frac{1}{5}$

   (iv) $P(x) = x^2 - 9$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যদ্বয় 3 ও -3

   (v) $P(x) = x^2 - 5x$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যদ্বয় 0 এবং 5

   (vi) $P(x) = x^2 - 2x - 8$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যদ্বয় 4 এবং (-2)

4. **নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির শূন্য নির্ণয় করি :**

   (i) $f(x) = 2 - x$ (ii) $f(x) = 7x + 2$ (iii) $f(x) = x + 9$

   (iv) $f(x) = 6 - 2x$ (v) $f(x) = 2x$ (vi) $f(x) = ax + b, (a \neq 0)$

বৃক্ষরোপণ অনুষ্ঠানে আমরা আমাদের শ্রেণিকক্ষটি খুব সুন্দর করে সাজাতে চাই। তাই আমরা বেশ কিছু টাকা সংগ্রহ করেছি।

39 কিন্তু আমাদের কাছে 55 টাকা এখনও অতিরিক্ত হিসাবে পড়ে আছে। আমরা 24 জনের মধ্যে ওই 55 টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দেবো। হিসাব করে দেখি প্রত্যেককে কত টাকা দেবো।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 24 & 55 \\ & -48 \\ \hline & 7 \end{array}$$

দেখছি, প্রত্যেককে 2 টাকা দেওয়ার পর আরও 7 টাকা পড়ে রইল।

$\therefore$ পেলাম $55 = 24 \times 2 + 7$ এবং $7 < 24$

$\therefore$ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ এবং $0 \leq$ ভাগশেষ $<$ ভাজক

এক্ষেত্রে, ভাজক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং ভাজ্য, ভাগফল ও ভাগশেষ অখণ্ড সংখ্যা।

কিন্তু যদি আমাদের কাছে 72 টাকা টাকা পড়ে থাকত, তবে আমরা 24 জনকে টাকাটা সমান ভাগে ভাগ করে দিতে পারতাম কিনা হিসাব করে দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 24 & 72 \\ & -72 \\ \hline & 0 \end{array}$$

এখানে ভাগশেষ 0

$\therefore 72 = 24 \times 3 + 0$

দেখছি, 24, 72 -এর উৎপাদক এবং 72, 24 -এর গুণিতক।

40 আমরা যদি $(3x^3 + 2x^2 + x)$ -এই টাকা x জনের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দিতাম, তাহলে প্রত্যেকে কত টাকা পাবো হিসাব করে দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline x & 3x^3 + 2x^2 + x \\ & -3x^3 \\ \hline & \quad 2x^2 \\ & \quad -2x^2 \\ \hline & \qquad x \\ & \qquad -x \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

বুঝেছি, প্রত্যেকে $(3x^2 + 2x + 1)$ টাকা পাবে।
এখানে ভাজ্য = $3x^3 + 2x^2 + x$, ভাজক = x, ভাগফল = $3x^2 + 2x + 1$
এবং ভাগশেষ = 0
$\therefore 3x^3 + 2x^2 + x = (3x^2 + 2x + 1) \times x + 0$

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

এবং ভাগশেষ 0 (শূন্য) অথবা ভাগশেষের মাত্রা < ভাজকের মাত্রা।

আবার দেখছি, $(3x^3 + 2x^2 + x)$-এর প্রতিটি পদে x আছে।
তাই লিখতে পারি, $3x^3+2x^2+x = x(3x^2+2x+1)$ যেখানে, x ও $3x^2+2x+1$ দুটিই বহুপদী সংখ্যামালা।
$\therefore$ বলতে পারি, x, $3x^3 + 2x^2 + x$ -এর **একটি উৎপাদক** এবং $3x^3 + 2x^2 + x$, x -এর **গুণিতক**।
আবার একইভাবে $(3x^2 + 2x + 1)$, $(3x^3 + 2x^2 + x)$ -এর **অপর একটি উৎপাদক**
এবং $(3x^3 + 2x^2 + x)$, $(3x^2 + 2x + 1)$ -এর **গুণিতক**।

ধরি, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ এবং $g(x) = x$
$g(x)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হবে 0; কারণ $g(0) = 0$

এবার $f(0)$ -র মান কী পাই দেখি।
$f(0) = 3.0 + 2.0 + 0 = 0$
$\therefore$ এক্ষেত্রে, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ কে $g(x) = x$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল $3x^2 + 2x + 1$ পেলাম।
ধরি, $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$
অর্থাৎ $f(x) = g(x) \times q(x) + f(0)$

41 যদি আমরা $(3x^3 + 2x^2 + 1)$- কে x দিয়ে ভাগ করতাম, তাহলে কী পেতাম দেখি।

পেতাম, $3x^3 + 2x^2 + 1 = x(3x^2 + 2x) + 1$
ধরি, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ এবং $g(x) = x$
এখানে, $f(0) = 3.0 + 2.0 + 1 = 1$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x \\ \hline x & 3x^3 + 2x^2 + 1 \\ & -3x^3 \\ \hline & \quad 2x^2 \\ & \quad -2x^2 \\ \hline & \qquad 1 \end{array}$$

$\therefore$ এখানে, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$- কে $g(x) = x$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল $3x^2 + 2x$ পেলাম, যেখানে, $q(x) = 3x^2 + 2x$
অর্থাৎ, $f(x) = g(x) \times q(x) + f(0)$

42 আমি যদি $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ -কে $g(x) = (x - 1)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা দিয়ে ভাগ করি, তাহলে কী পাই দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 8 \\ \hline x-1 & 3x^2 + 5x + 1 \\ & \underline{-3x^2 \mp 3x} \\ & \qquad 8x + 1 \\ & \qquad \underline{-8x \mp 8} \\ & \qquad\quad 9 \end{array}$$

এখানে, ভাজ্য = $3x^2 + 5x + 1$, ভাজক = $x - 1$,
ভাগফল = $3x + 8$ এবং ভাগশেষ = 9
আবার, $3x^2 + 5x + 1 = (x - 1)(3x + 8) + 9$
[নিজে হিসাব করে যাচাই করি]

$\therefore$ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

অর্থাৎ যদি f (x) এবং g (x) দুটি বহুপদী সংখ্যামালা হয়, এবং $g(x) \neq 0$ হয়, তবে দুটি অনন্য (unique) বহুপদী সংখ্যামালা q (x) এবং r (x) পাবো, যাতে **$f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$** হয়, যেখানে $r(x) = 0$ অথবা r (x)-এর মাত্রা < g (x)-এর মাত্রা।

দেখছি, $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$, $g(x) = x - 1$এবং

g (x) রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 1

এবং $f(1) = 3.1^2 + 5.1 + 1 = 9$

∴ $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $g(x) = x - 1$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা দিয়ে ভাগ করার ক্ষেত্রে একটি বহুপদী সংখ্যামালা $q(x) = 3x + 8$ পেলাম যাতে,

$f(x) = g(x) \times q(x) + f(1)$ হয় এবং f (1)-এর মাত্রা < g (x)-এর মাত্রা।

অর্থাৎ এক্ষেত্রেও সহজে ভাগশেষ = f (1) পেলাম।

43 $3x^2 + 5x - 1$-কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করে দেখি ভাগশেষ 7 অর্থাৎ f (1) হচ্ছে কিনা। **[নিজে করি]**

44 আমি $f(x) = x^4+x^3+2x^2-1$- কে $g(x) = x+1$ দিয়ে ভাগ করে দেখছি,

ভাগশেষ= $f(-1) = (-1)^4+(-1)^3+2(-1)^2-1$

$= 1-1+2-1=1$ [নিজে করি]

আমরা উপরের উদাহরণ থেকে দেখছি, কোনো বহুপদী সংখ্যামালা f (x)-কে কোনো রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা g(x) দিয়ে ভাগ করার ক্ষেত্রে ভাগ না করেই খুব সহজেই ভাগশেষ নির্ণয় করতে পারছি।

ভাগশেষ নির্ণয় করার এই সহজ পদ্ধতি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) :

f(x) একটি বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা $n (n \geq 1)$ এবং a যে-কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা। f(x) -কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে f(a)

প্রমাণ : ধরি, f (x) একটি বহুপদী সংখ্যামালা।

f(x)-কে (x–a) দিয়ে ভাগ করলে অনন্য (unique) ভাগফল q(x) এবং অনন্য (unique) ভাগশেষ r(x) পাই।

এবং $f(x) = (x-a)\, q(x) + r(x)$..............(I) এবং $r(x) = 0$ অথবা r (x) এর মাত্রা < (x–a)-এর মাত্রা

(x–a)-এর মাত্রা 1 এবং r (x)-এর মাত্রা, (x–a)-র মাত্রার কম।

∴ r (x) -এর মাত্রা =0 অথবা, $r(x) = 0$

∴ r (x) একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

ধরি, $r(x) = R$

∴ (I) নংথেকে পেলাম, $f(x) = (x-a)\, q(x) + R$. (এটি একটি অভেদ)

x = a বসিয়ে পাই, $f(a) = (a-a)\, q(a) + R = R$. ∴ $f(a) = R$ (প্রমাণিত)।

45 $f(x) = x^3-2x^2+6x-1$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(x-2)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে সহজে হিসাব করে লিখি।

প্রথমে $(x-2)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য খুঁজি।

$\therefore \quad x-2 = 0$ সুতরাং, $x = 2$

ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে জানি, $f(x) = x^3-2x^2+6x-1$-কে $x-2$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= f(2)$

$= (2)^3 - 2.2^2+6.2-1 \quad = 8-8+12-1 = 11$

46 $(12x^3-11x+5)$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(2x-1)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো লিখি।

$2x-1 = 0$ সুতরাং, $x = \frac{1}{2}$

$(2x-1)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হলো $\frac{1}{2}$

ধরি, $f(x) = 12x^3 - 11x + 5$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= f(\frac{1}{2}) = 12\times(\frac{1}{2})^3 - 11\times\frac{1}{2}+5$

$= 12 \times \frac{1}{8} - \frac{11}{2} + 5 = \frac{3}{2} - \frac{11}{2} + 5 = \square$

47 $f(x) = x^4-2x^2-1$-কে $(x-1)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো লিখি। [নিজে করি]

48 $f(x) = 4x^3+8x^2-5$-কে $(2x+1)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো লিখি। [নিজে করি]

49 $(10x^3 - 11x^2 - 8x + 3)$ বহুপদী সংখ্যামালা $(2x-3)$-এর গুণিতক কিনা হিসাব করে লিখি।

$2x-3 = 0$

বা, $2x = 3 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $(2x-3)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য $\frac{3}{2}$

ধরি, $f(x) = 10x^3 - 11x^2 - 8x + 3$

$\therefore$ $(2x-3)$-এর গুণিতক $f(x)$ হবে যদি $f(\frac{3}{2}) = 0$ হয়।

$f(\frac{3}{2}) = 10 \times (\frac{3}{2})^3 - 11 \times (\frac{3}{2})^2 - 8 \times \frac{3}{2} + 3 = \square$

$\therefore$ $f(x)$, $(2x-3)$ এর গুণিতক।

50 হিসাব করে দেখি $(x-2)$, $f(x) = x^3 - x - 6$-এর উৎপাদক কিনা।

$(x-2)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 2

$f(x) = x^3 - x - 6$

সুতরাং, $f(2) = \square^3 - \square - \square$ (নিজে করি)

$\therefore f(2) = \square$

$\therefore$ $(x-2)$, $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

51 যদি $ax^2 + 3x - 5$ এবং x^2-2x+a বহুপদী সংখ্যামালাদ্বয়কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, তবে a-এর মান হিসাব করে লিখি।

ধরি, $f(x) = ax^2 + 3x - 5$ এবং $g(x) = x^2-2x+a$

$f(x)$-কে $(x-3)$দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ পাই, $f(3) = 9a + 9 - 5 = 9a + 4$

$g(x)$-কে $(x-3)$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ পাই, $g(3) = 9 - 6 + a = 3 + a$

যেহেতু, $f(3) = g(3)$

সুতরাং, $9a + 4 = 3 + a$

বা, $8a = -1 \qquad \therefore a = -\frac{1}{8}$

52 যদি ax^2-8x-5 এবং $2x^2+x+3a$ বহুপদী সংখ্যামালাদ্বয়কে $(x-1)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, তবে a-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 7.3

1. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে x^3-3x^2+2x+5 -কে (i) $x-2$ (ii) $x+2$ (iii) $2x-1$ (iv) $2x+1$ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে কত ভাগশেষ পাবো হিসাব করে লিখি।

2. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(x-1)$ দ্বারা নীচের বহুপদী সংখ্যামালাকে ভাগ করলে কী কী ভাগশেষ পাবো হিসাব করে লিখি।
   (i) $x^3-6x^2+13x+60$ (ii) $x^3-3x^2+4x+50$
   (iii) $4x^3+4x^2-x-1$ (iv) $11x^3-12x^2-x+7$

3. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে ভাগশেষ লিখি যখন,
   (i) $(x-3)$ দ্বারা (x^3-6x^2+9x-8) বহুপদী সংখ্যামালাকে ভাগ করা হয়।
   (ii) $(x-a)$ দ্বারা (x^3-ax^2+2x-a) বহুপদী সংখ্যামালাকে ভাগ করা হয়।

4. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $p(x)=4x^3+4x^2-x-1$ বহুপদী সংখ্যামালা $(2x+1)$-এর গুণিতক কিনা হিসাব করি।

5. $(x-4)$ দ্বারা (ax^3+3x^2-3) এবং $(2x^3-5x+a)$ বহুপদী সংখ্যামালাদ্বয়কে ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে তবে a-এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

6. x^3+2x^2-px-7 এবং $x^3+px^2-12x+6$ এই দুটি বহুপদী সংখ্যামালাকে যথাক্রমে $(x+1)$ ও $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি R_1 ও R_2 ভাগশেষ পাওয়া যায় এবং যদি $2R_1+R_2=6$ হয়, তবে p-এর মান কত হিসাব করি।

7. $x^4-2x^3+3x^2-ax+b$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(x-1)$ এবং $(x+1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যথাক্রমে 5 এবং 19 হয়। ওই বহুপদী সংখ্যামালাকে $x+2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে হিসাব করি।

8. যদি $f(x)=\dfrac{a(x-b)}{a-b}+\dfrac{b(x-a)}{b-a}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $f(a)+f(b)=f(a+b)$

9. $f(x)=ax+b$ এবং $f(0)=3$, $f(2)=5$ হলে, a ও b-এর মান নির্ণয় করি।

10. $f(x)=ax^2+bx+c$ এবং $f(0)=2$, $f(1)=1$ ও $f(4)=6$ হলে, a, b ও c এর মান নির্ণয় করি।

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন: (M.C.Q.)

(i) নীচের কোনটি একচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা
   (a) $x+\dfrac{2}{x}+3$ (b) $3\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+5$ (c) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+6$ (d) $x^{10}+y^5+8$

(ii) নীচের কোনটি বহুপদী সংখ্যামালা
   (a) $x-1$ (b) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (c) $x^2-\dfrac{2}{x^2}+5$ (d) $x^2+\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2}}+6$

(iii) নীচের কোনটি রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা
   (a) $x+x^2$ (b) $x+1$ (c) $5x^2-x+3$ (d) $x+\dfrac{1}{x}$

(iv) নীচের কোনটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা
   (a) $\sqrt{x}-4$ (b) x^3+x (c) x^3+2x+6 (d) x^2+5x+6.

(v) $\sqrt{3}$ বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা
   (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) 2 (c) 1 (d) 0

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(i) $p(x) = 2x - 3$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কত লিখি।

(iii) $p(x) = x + 4$ হলে, $p(x) + p(-x)$ -এর মান কত লিখি।

(iv) $x^3 + 4x^2 + 4x - 3$ বহুপদী সংখ্যামালাকে x দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষ কত হবে লিখি।

(v) $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + ...+a_1x + a_0$ হলে, $a_7 + a_6 + a_5 + ...+ a_0$-এর মান কত লিখি। (যেখানে a_7, a_6..........a_0 ধ্রুবক)

53 বৃক্ষরোপণ অনুষ্ঠানের পর যদি 96 টাকা পড়ে থাকত এবং আমরা 24 জনকে সেই টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দিতাম তাহলে প্রত্যেককে কত করে দিতাম দেখি।

96 টাকা ÷ 24 = ☐ টাকা।

আবার, **96 = 24 × 4 + 0,** $0 < 24$ **এবং এখানে ভাগশেষ 0; 24, 96-এর উৎপাদক।**
24, 96 -এর উৎপাদক হলে 96 কে 24 দিয়ে ভাগ করার সময় ভাগশেষ শূন্য হবে।

54 $(6x^2 + 17x + 5)$ টাকা $(3x + 1)$ জনের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দেবার পর কত টাকা অবশিষ্ট থাকবে দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 2x+5 \\ 3x+1 & 6x^2+17x+5 \\ & \underline{6x^2 \;+ 2x} \\ & \quad\quad 15x+5 \\ & \quad\quad \underline{15x+5} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

ভাগশেষ = 0

$(3x + 1)$, $(6x^2 + 17x + 5)$ -এর একটি উৎপাদক

অন্যভাবে বলতে পারি $(3x + 1)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালাটি $6x^2 + 17x + 5$ বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক হলে, অপর একটি বহুপদী সংখ্যামালা $(2x + 5)$ পাবো যাতে, $6x^2 + 17x + 5 = (3x + 1)(2x + 5)$ হবে।

পেলাম, বহুপদী সংখ্যামালা $f(x)$-এর একটি উৎপাদক $(x - a)$ হবে, যদি $f(a) = 0$ হয় এবং $f(a) = 0$ হলে $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হবে।

উপরের উদাহরণ থেকে পাওয়া কোনো বহুপদী সংখ্যামালার সঙ্গে কোনো রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার উৎপাদক হওয়ার শর্ত লিখি ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

গুণনীয়ক উপপাদ্য (Factor Theorem) :

যদি $f(x)$ কোনো একটি বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা $n(n \geq 1)$ এবং a যে-কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে

(i) $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হবে, যদি $f(a) = 0$ হয়

এবং (ii) $f(a) = 0$ হবে, যদি $(x - a)$, $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক হয়।

প্রমাণ : ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে বলতে পারি, একটি বহুপদী সংখ্যামালা $f(x)$ কে $(x - a)$ দিয়ে ভাগ করলে একটি বহুপদী সংখ্যামালা $q(x)$ পাবো যাতে $f(x) = (x - a)\, q(x) + f(a)$ হয়।

(i) যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে $f(x) = (x - a)\, q(x)$ পাবো।

∴ $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক।

(ii) আবার যদি $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হয়, তাহলে একটি বহুপদী সংখ্যামালা $g(x)$ পাবো যাতে $f(x) = (x - a)\, g(x)$ হবে।

$x = a$ বসিয়ে পাবো $f(a) = (a - a)\, g(a) = 0$ (প্রমাণিত)

55 আমি গুণনীয়ক উৎপাদক ব্যবহার করে $(x-2),(4x^4+4x^3-19x^2-16x+12)$-এর একটি উৎপাদক কিনা পরীক্ষা করি। প্রথমে $x-2$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কত হবে দেখি।

$x-2=0 \therefore x=2$

ধরি, $f(x)=4x^4+4x^3-19x^2-16x+12$

$x=2$ বসিয়ে পাই, $f(2)=4(2)^4+4(2)^3-19\times(2)^2-16\times2+12$

$=4\times16+4\times8-19\times4-32+12$

$=64+32-76-32+12 \quad =108-108 \quad =0$

$\therefore$ $(x-2),(4x^4+4x^3-19x^2-16x+12)$-এর একটি উৎপাদক

56 k-এর মান কত হলে, $(3x-2)$, $15x^2-kx-14$-এর একটি উৎপাদক হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, $f(x)=15x^2-kx-14$

$(3x-2)$ - রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য $\frac{2}{3}$

$3x-2=0,$
$\therefore x=\frac{2}{3}$

$\because (3x-2)$, $f(x)$- এর একটি উৎপাদক,

$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore 15\left(\frac{2}{3}\right)^2-k\frac{2}{3}-14=0$

বা, $15\times\frac{4}{9}-\frac{2k}{3}-14=0$

বা, $\frac{-2k}{3}=14-\frac{20}{3}=\frac{42-20}{3}$

বা $-\frac{2k}{3}=\frac{22}{3}$ $\qquad \therefore k=-11$

$\therefore k=-11$ হলে ,$(3x-2)$, $15x^2-kx-14$ - এর একটি উৎপাদক হবে।

57 k-এর মান কত হলে, $4x^2-kx+1$-এর একটি উৎপাদক $(x-1)$ হবে, হিসাব করে লিখি।[নিজে করি]

58 n যে-কোনো যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, দেখাই যে, x^n-y^n বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $x+y$

ধরি, x^n-y^n কে $x+y$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল Q এবং x বর্জিত ভাগশেষ R

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ,

$\therefore x^n-y^n=(x+y)\times Q+R$ [এটি একটি অভেদ]

যেহেতু R- ভাগশেষটি x বর্জিত, সুতরাং x-এর মান যাই হোক না কেন, তাতে R-এর মান পরিবর্তিত হবে না। তাই উপরের অভেদে x-এর জায়গায় $(-y)$ লিখে পাই

$(-y)^n-y^n=(-y+y)\times Q+R$

$y^n-y^n=0\times Q+R$ $\qquad$ ($\because$ n যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

$\therefore R=0$

সুতরাং, x^n-y^n বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $(x+y)$, যখন n যে-কোনো যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

কষে দেখি— 7.4

1. নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির মধ্যে কোনগুলির একটি উৎপাদক $(x + 1)$ হিসাব করে লিখি।

(i) $2x^3 + 3x^2 - 1$ (ii) $x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 5$ (iii) $7x^3 + x^2 + 7x + 1$
(iv) $3 + 3x - 5x^3 - 5x^4$ (v) $x^4 + x^2 + x + 1$ (vi) $x^3 + x^2 + x + 1$

2. গুণনীয়ক উপপাদ্য ব্যবহার করে নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক $g(x)$ কিনা লিখি।

(i) $f(x) = x^4 - x^2 - 12$ এবং $g(x) = x + 2$
(ii) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 11x - 30$ এবং $g(x) = x + 5$
(iii) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 24x - 45$ এবং $g(x) = x - 3$
(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$. এবং $g(x) = 3x - 2$

3. k- এর মান কত হলে $x + 2$ দ্বারা $2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ বহুপদী সংখ্যামালাটি বিভাজ্য হবে হিসাব করে লিখি।

4. k- এর মান কত হলে, নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি $f(x)$ - এর একটি উৎপাদক $g(x)$ হবে হিসাব করি:

(i) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + x + k$ এবং $g(x) = x - 1$
(ii) $f(x) = kx^2 - 3x + k$ এবং $g(x) = x - 1$
(iii) $f(x) = 2x^4 + x^3 - kx^2 - x + 6$ এবং $g(x) = 2x - 3$
(iv) $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 11x + k + 3$ এবং $g(x) = 2x - 1$

5. $ax^4 + 2x^3 - 3x^2 + bx - 4$ বহুপদী সংখ্যামালার উৎপাদক $x^2 - 4$ হলে, a ও b এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

6. $x^3 + 3x^2 + 2ax + b$ বহুপদী সংখ্যামালার দুটি উৎপাদক $(x + 1)$ এবং $(x + 2)$ হলে, a ও b এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

7. $ax^3 + bx^2 + x - 6$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 4 হয় এবং এই বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক $x + 2$ হলে, a ও b-এর মান কত হবে হিসাব করি।

8. n যে-কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হলে, দেখাই যে, $x^n - y^n$ বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $x - y$.

9. n যে-কোনো অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, দেখাই যে $x^n + y^n$ বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $x + y$.

10. n যে-কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হলে, দেখাই যে $x^n + y^n$ বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক কখনই $x - y$ হবে না।

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M . C. Q.):

(i) $x^3 + 6x^2 + 4x + k$ বহুপদী সংখ্যামালাটি $(x + 2)$ দ্বারা বিভাজ্য হলে, k-এর মান

(a) - 6 (b) – 7 (c) – 8 (d) – 10

(ii) $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার $f(-\frac{1}{2}) = 0$ হলে, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে

(a) $2x - 1$ (b) $2x+1$ (c) $x - 1$ (d) $x + 1$

(iii) f (x) বহুপদী সংখ্যামালার (x – 1) একটি উৎপাদক, কিন্তু g (x) বহুপদী সংখ্যামালার উৎপাদক নয়। সুতরাং (x – 1) একটি উৎপাদক হবে

(a) f (x) g (x) (b) –f (x) + g (x) (c) f (x) – g (x) (d) {f(x)+g(x)}g(x)

(iv) $x^n + 1$ বহুপদী সংখ্যামালার (x + 1) একটি উৎপাদক হবে যখন

(a) n একটি অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (b) n একটি যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

(c) n একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (d) n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

(v) $an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ বহুপদী সংখ্যামালার $n^2 - 1$ উৎপাদক হলে

(a) $a + c + e = b + d$ (b) $a + b + e = c + d$ (c) $a + b + c = d + e$ (d) $b + c + d = a + e$

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

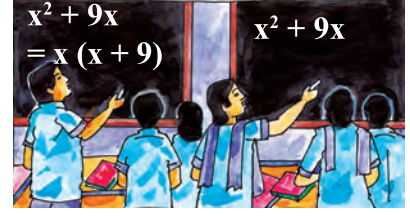
(i) $x^3 + ax^2 - 2x + a - 12$ বহুপদী সংখ্যামালার $x + a$ একটি উৎপাদক হলে, a-এর মান কত হিসাব করে লিখি।

(ii) $k^2 x^3 - kx^2 + 3kx - k$ বহুপদী সংখ্যামালার $x - 3$ একটি উৎপাদক হলে, k-এর মান কত হিসাব করে লিখি।

(iii) $f(x) = 2x + 5$ হলে, $f(x) + f(-x)$ -এর মান কত হবে লিখি।

(iv) $px^2 + 5x + r$ বহুপদী সংখ্যামালার $(x - 2)$ এবং $(x - \frac{1}{2})$ উভয়েই উৎপাদক হলে, p ও r -এর মধ্যে সম্পর্ক হিসাব করে লিখি।

(v) $f(x) = 2x + 3$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কত হবে লিখি।

8 উৎপাদকে বিশ্লেষণ
(FACTORISATION)

আজ শনিবার। আজ আমরা স্কুলে একটি মজার খেলা খেলব। আমাদের শ্রেণিকক্ষে দুটি ব্ল্যাকবোর্ড। প্রথমে আমরা সবাই দুটি দলে ভাগ হয়ে যাব। এবার প্রতি দলের একজন একটি ব্ল্যাকবোর্ডে যে-কোনো একটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখবে। অপরদল অন্য বোর্ডে ওই বহুপদী সংখ্যামালাটি উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করবে।

মিহির বোর্ডে লিখল 26

আমরা করলাম, $26 = 2 \times 13$

1 সাথি বোর্ডে লিখল $x^2 + 9x$; এটি একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা। $(x^2 + 9x)$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 + 9x = x\,(x + 9)$

2 অলি লিখল $x^2 + 3x - 4$; এটি একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা। $(x^2 + 3x - 4)$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 4x - x - 4$

$= x\,(x + 4) - 1\,(x + 4) \quad = (x + 4)\,(x - 1)$

3 নাসরিন লিখল $x^3 + 3x - 4$; এটি একটি ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা। এই ধরনের বহুপদী সংখ্যামালাকে কীভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করব?

ধরি, $f(x) = x^3 + 3x - 4$

প্রথমে $f(x)$-এর একটি উৎপাদক খুঁজি।

$f(x)$-এ $x = +1, +2, +3$, বসিয়ে দেখি x - এর কোন মানে $f(x) = 0$ পাই।

$f(1) = (1)^3 + 3.1 - 4 = 0$

দেখছি, $f(1) = 0$

গুণনীয়ক উপপাদ্য থেকে বলতে পারি, $(x-1)$, $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$x^3 + 3x - 4$

$= x^3 - x^2 + x^2 - x + 4x - 4$

$= x^2\,(x-1) + x\,(x-1) + 4\,(x-1)$

$= (x-1)\,(x^2 + x + 4)$

$\therefore x^3 + 3x - 4 = (x-1)\,(x^2 + x + 4)$

> $f(x) = x^3 + 3x - 4$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণে প্রথমে $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক খুঁজতে হবে। অর্থাৎ x-এর কোন মানের জন্য $f(x)$ -এর মান 0 হবে তা নির্ণয় করতে হবে।

কিন্তু এই পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণকে কী বলা হয়?

শূন্য পদ্ধতি (Vanishing Method) বা পরীক্ষা পদ্ধতি (Trial method) বলা হয়।

4 $f(x) = x^3 + 3x - 4$, এখানে $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$, বসিয়ে x -এর কোন মানে $f(x)$ -এর মান শূন্য হবে, সেটা জানার কি কোনো সহজ পদ্ধতি আছে?

$f(x)$ -এ ধ্রুবক পদটি -4 এবং -4 এর উৎপাদকগুলি হলো $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

সুতরাং x -এর এই মানগুলির মধ্যে কোনো একটি মান বা একের বেশি মানে $f(x)$ -এর মান শূন্য হবে।

5 $f(x) = x^3 + 3x + 4$ হলে, তখনও কি x -এর স্থানে $\pm 1, \pm 2, \pm 3...$ এই উৎপাদকগুলির কোনো একটির মান বসিয়ে f (x) -এর মান শূন্য পেতাম?

এখানে যেহেতু f (x) -এর প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক , সুতরাং x -এর ধনাত্মক মানে f (x) শূন্য হতো না।

তাই এখানে x-এর ঋণাত্মক মানে f (x) -এর মান শূন্য হবে।

যদি $x = -1$ হয়, $f(x) = (-1)^3 + 3(-1) + 4$

$= -1 - 3 + 4 = 0$

সুতরাং এখানে $x^3 + 3x + 4$ বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক হতো $(x + 1)$

রজত লিখল → $\boxed{x^3 - 7x - 6}$

6 $(x^3 - 7x - 6)$ বহুপদী সংখ্যামালা শূন্য পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণের জন্য x -এর কোন মানের জন্য $x^3 - 7x - 6$ -এর মান শূন্য হবে দেখি।

ধরি, $f(x) = x^3 - 7x - 6$

দেখছি, $f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = 0$

∴ গুণনীয়ক উপপাদ্য থেকে পাই, $(x + 1)$, f (x) -এর একটি উৎপাদক

$$\begin{aligned} & x^3 - 7x - 6 \\ = \; & x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6 \\ = \; & x^2(x + 1) - x(x + 1) - 6(x + 1) \\ = \; & (x + 1)(x^2 - x - 6) \\ = \; & (x + 1)\{x^2 - 3x + 2x - 6\} \\ = \; & (x + 1)\{x(x - 3) + 2(x - 3)\} \\ = \; & (x + 1)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

অন্যভাবে,

$$\begin{aligned} & x^3 - 7x - 6 \\ & = x^3 + 1 - 7x - 7 \\ & = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 7(x + 1) \\ & = (x + 1)(x^2 - x + 1 - 7) \\ & = (x + 1)(x^2 - x - 6) \\ & = (x + 1)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

এছাড়া, $(x^3 - 7x - 6)$ কে $(x + 1)$ দ্বারা ভাগ করেও বাকি উৎপাদকগুলি পেতে পারি।

7 $(x^3 - 7x + 6)$ এবং $(2x^3 - x - 1)$ বহুপদী সংখ্যামালাদুটি একইভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি। [নিজে করি]

8 মোহিত লিখল, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$: এখানেও কি -9 এর উৎপাদকগুলির মধ্যে $2x^3 + x^2 - 9x - 9$ বহুপদী সংখ্যামালার মান শূন্য হবে?

এক্ষেত্রে চলের সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ 2 এবং ধ্রুবক সংখ্যা -9; আবার $\frac{-9}{2}$ লঘিষ্ঠ আকারে আছে।

-9 -এর উৎপাদকগুলি $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

2 -এর উৎপাদকগুলি $\pm 1, \pm 2$

সুতরাং f (x)-এর সম্ভাব্য বাস্তব শূন্যগুলি হবে $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$

$f(1) = 2 + 1 - 9 - 9 \neq 0$

$f(-1) = -2 + 1 + 9 - 9 \neq 0$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$-এ x -এর মান $-\frac{1}{2}$ বসিয়ে দেখি f (x) -এর মান শূন্য হয় কিনা।

$$f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^2 - 9(-\frac{1}{2}) - 9$$

$$= 2 \times (-\frac{1}{8}) + \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 9 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 9 \neq 0$$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$-এ x -এর মান $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$ বসিয়ে দেখি f (x) -এর মান শূন্য হয় কিনা।

$$f(-\frac{3}{2}) = 2(-\frac{3}{2})^3 + (-\frac{3}{2})^2 - 9(-\frac{3}{2}) - 9$$

$$= 2 \times (-\frac{27}{8}) + \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 9 = -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 9$$

$$= \frac{-27 + 9 + 54 - 36}{4} \qquad = \frac{-63 + 63}{4} \qquad = 0$$

সুতরাং, $x = \frac{-3}{2}$ মানে f (x) -এর মান শূন্য।

$\therefore$ $2x + 3$, $2x^3 + x^2 - 9x - 9$ বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক

$2x^3 + x^2 - 9x - 9$
$= 2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x - 6x - 9$
$= x^2(2x + 3) - x(2x + 3) - 3(2x + 3)$
$= (2x + 3)(x^2 - x - 3)$

9 রীনা লিখল— $8a^3 + 8a - 5$

ধরি, $f(a) = 8a^3 + 8a - 5$

মান বসিয়ে দেখছি, $f(\frac{1}{2}) = 8 \times (\frac{1}{2})^3 + 8 \times (\frac{1}{2}) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$

$\therefore$ গুণনীয়ক উপপাদ্য থেকে পাই f(a) -এর একটি উৎপাদক $(2a - 1)$

$(8a^3 + 8a - 5)$
$= 8a^3 - 4a^2 + 4a^2 - 2a + 10a - 5$
$= 4a^2(2a - 1) + 4a(2a - 1) + 5(2a - 1)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 5)$

অন্যভাবে,

$8a^3 + 8a - 5$
$= 8a^3 - 1 + 8a - 4$
$= (2a)^3 - (1)^3 + 4(2a - 1)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) + 4(2a - 1)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1 + 4)$
$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 5)$

10 আমি একইভাবে $(8a^3 + 4a - 3)$ বহুপদী সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি ও কী কী উৎপাদক পাই দেখি। (নিজে করি)

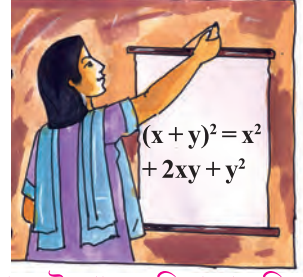
কষে দেখি— 8.1

নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি :

1. $x^3 - 3x + 2$
2. $x^3 + 2x + 3$
3. $a^3 - 12a - 16$
4. $x^3 - 6x + 4$
5. $x^3 - 19x - 30$
6. $4a^3 - 9a^2 + 3a + 2$
7. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$
8. $5a^3 + 11a^2 + 4a - 2$
9. $2x^3 - x^2 + 9x + 5$
10. $2y^3 - 5y^2 - 19y + 42$

আমরা যখন সবাই মিলে এই নতুন খেলায় ব্যস্ত তখন আমার বন্ধু সুচেতা এক মজার কাজ করেছে। সে একটি সাদা আর্ট পেপারে তার জানা কিছু অভেদ লিখে শ্রেণিকক্ষের একদিকের দেয়ালে টাঙিয়ে দিয়েছে।

সে লিখেছে,

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ — I
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ — II
$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$ — III

11 আমি সুচেতার লেখা অভেদের সাহায্যে $(x^2 - 1 - 2a - a^2)$ বহুপদী সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$x^2 - 1 - 2a - a^2$
$= x^2 - (1 + 2a + a^2)$
$= x^2 - (1 + a)^2$ [(I) অভেদের সাহায্যে পেলাম]
$= (x + 1 + a)(x - 1 - a)$ [(III) অভেদের সাহায্যে পেলাম]

12 আমি সুচেতার লেখা অভেদের সাহায্য নিয়ে নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $p^4 + 2p^2 + 9$ (ii) $x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$ (iii) $a^{16} - b^{16}$ (iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y$

(i) $p^4 + 2p^2 + 9 = (p^2)^2 + 2 \cdot p^2 \cdot 3 + (3)^2 - 4p^2$
$= (p^2 + 3)^2 - (2p)^2 = (p^2 + 3 + 2p)(p^2 + 3 - 2p)$

(ii) $x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$
$= x^2 - 2ax + a^2 - b^2$
$= (x - a)^2 - b^2$
$= (x - a + b)(x - a - b)$

অন্যভাবে

$x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$
$= x^2 - \{(a + b) + (a - b)\}x + (a + b)(a - b)$
$= x^2 - (a + b)x - (a - b)x + (a + b)(a - b)$
$= x\{x - (a + b)\} - (a - b)\{x - (a + b)\}$
$= \{x - (a + b)\}\{x - (a - b)\}$
$= (x - a - b)(x - a + b)$

(iii) $a^{16} - b^{16}$
$= (a^8)^2 - (b^8)^2$
$= (a^8 + b^8)(a^8 - b^8)$
$= (a^8 + b^8)\{(a^4)^2 - (b^4)^2\}$
$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$
$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)\{(a^2)^2 - (b^2)^2\}$
$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

(iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y$
$= (2x)^2 - 2.2x.3y + (3y)^2 + 2x - 3y$
$= (2x - 3y)^2 + (2x - 3y)$
$= (2x - 3y)(2x - 3y + 1)$

কষে দেখি— 8.2

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি :

1. $\frac{x^4}{16} - \frac{y^4}{81}$ **2.** $m^2 + \frac{1}{m^2} + 2 - 2m - \frac{2}{m}$ **3.** $9p^2 - 24pq + 16q^2 + 3ap - 4aq$

4. $4x^4 + 81$ **5.** $x^4 - 7x^2 + 1$ **6.** $p^4 - 11p^2q^2 + q^4$

7. $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$ **8.** $3a(3a + 2c) - 4b(b + c)$ **9.** $a^2 - 6ab + 12bc - 4c^2$

10. $3a^2+4ab+b^2-2ac-c^2$ **11.** $x^2-y^2-6ax+2ay+8a^2$ **12.** $a^2-9b^2+4c^2-25d^2-4ac+30bd$

13. $3a^2-b^2-c^2+2ab-2bc+2ca$ **14.** $x^2 - 2x - 22499$ **15.** $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) + 4abxy$

আমার বন্ধু পল্লবও সুচেতার মতো তার জানা কিছু অভেদ চার্টপেপারে লিখে দেয়ালে টাঙিয়ে দিল।

পল্লব লিখল ,

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ — IV	$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ — VII
$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ — V	$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ — VIII
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ — VI	$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ — IX

13 নাসরিন ব্ল্যাকবোর্ডে পাঁচটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল। সেগুলি,

(i) $a^3 - \frac{1}{a^3} - 2a + \frac{2}{a}$ (ii) $\frac{x^3}{64}$ $\frac{64}{x^3}$ (iii) $1 - x^{12}$

(iv) $63a^3 + 6a^2 - 12a + 8$ (v) $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

আমি নাসরিনের লেখা বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে দেয়ালে টাঙানো অভেদের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $a^3 - \frac{1}{a^3} - 2a + \frac{2}{a}$

$= (a - \frac{1}{a})\ \{a^2 + a.\frac{1}{a} + (\frac{1}{a})^2\} - 2(a - \frac{1}{a})$ **[IX- নং অভেদের সাহায্যে]**

$= (a - \frac{1}{a})(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}) - 2(a - \frac{1}{a})$

$= (a - \frac{1}{a})\ [a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} - 2]$ $= (a - \frac{1}{a})\ (a^2 - 1 + \frac{1}{a^2})$

(ii) $\frac{x^3}{64} - \frac{64}{x^3}$

$= (\frac{x}{4})^3 - (\frac{4}{x})^3$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + \frac{x}{4} \times \frac{4}{x} + (\frac{4}{x})^2\}$ **[IX- নং অভেদের সাহায্যে]**

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + 1 + (\frac{4}{x})^2\}$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + 2.\frac{x}{4}.\frac{4}{x} + (\frac{4}{x})^2 - 1\}$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4} + \frac{4}{x})^2 - (1)^2\} = (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ (\frac{x}{4} + \frac{4}{x} + 1)\ (\frac{x}{4} + \frac{4}{x} - 1)$

(iii) $1 - x^{12}$

$= (1)^2 - (x^6)^2$

$= (1 + x^6)(1 - x^6)$

$= (1 + x^6)\{(1)^2 - (x^3)^2\}$

$= (1 + x^6)(1 + x^3)(1 - x^3)$

$= \{(1)^3 + (x^2)^3\}\ \{(1)^3 + (x)^3\}\ \{(1)^3 - (x)^3\}$

$= (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)(1 + x)(1 - x + x^2)(1 - x)(1 + x + x^2)$

$= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)(1 - x^2 + x^4)$

(iv) $63a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= 64a^3 - a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= (4a)^3 - \{(a)^3 - 3.(a)^2.\ 2 + 3.a.(2)^2 - (2)^3\}$

$= (4a)^3 - (a-2)^3$

$= \{4a - (a-2)\}\ \{(4a)^2 + 4a.\ (a-2) + (a-2)^2\}$

$= (4a - a + 2)\ (16a^2 + 4a^2 - 8a + a^2 - 4a + 4)$

$= (3a + 2)\ (21a^2 - 12a + 4)$

(v) $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

$= a^3 - b^3 + (a+b)^3 - 8b^3$

$= (a)^3 - (b)^3 + (a+b)^3 - (2b)^3$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) + \{\ (a+b) - 2b\}\ \{(a+b)^2 + (a+b).2b + (2b)^2\}$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) + (a-b)\ (a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2)$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) + (a-b)\ (a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)\ (2a^2 + 5ab + 8b^2)$

কষে দেখি— 8.3

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

1. $t^9 - 512$ **2.** $729p^6 - q^6$ **3.** $8\ (p-3)^3 + 343$ **4.** $\frac{1}{8a^3} + \frac{8}{b^3}$

5. $(2a^3 - b^3)^3 - b^9$ **6.** $AR^3 - Ar^3 + AR^2h - Ar^2h$ **7.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8$

8. $32x^4 - 500x$ **9.** $8a^3 - b^3 - 4ax + 2bx$ **10.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 35$

নিষাদ একটি বোর্ডে লিখল ⟶ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

14 দেখছি, $x^3 + y^3 + z^3$ — $3xyz$ - একটি তিনটি চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 3; আমি দেয়ালে টাঙানো চার্ট পেপারের অভেদগুলির সাহায্য নিয়ে $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y)^3 - 3xy\ (x+y) + z^3 - 3xyz$

$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy\ (x+y) - 3xyz$

$= (x+y+z)\ \{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2\} - 3xy\ (x+y+z)$

$= (x+y+z)\ \{x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + z^2 - 3xy\}$

$= (x+y+z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

আমরা আর একটি নতুন অভেদ পেলাম।

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ——— X

15 যদি $x + y + z = 0$ হয়, তাহলে $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ কত হবে দেখি।

যেহেতু $x + y + z = 0$, সুতরাং, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$\therefore\ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ——— XI

16 আমি X– নং অভেদের সাহায্যে নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $1 + b^3 + 8c^3 - 6bc$ (ii) $a^3 - b^3 + 1 + 3ab$

(iii) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ (iv) $a^6 + 5a^3 + 8$

(i) $1 + b^3 + 8c^3 - 6bc = (1)^3 + (b)^3 + (2c)^3 - 3.1.b.2c$

$= (1 + b + 2c)\ \{(1)^2 + b^2 + (2c)^2 - 1.b - b.2c - 2c.1\}$ [X– নং থেকে পেলাম]

$= (1 + b + 2c)\ (1 + b^2 + 4c^2 - b - 2bc - 2c)$

(ii) $a^3 - b^3 + 1 + 3ab = (a)^3 + (-b)^3 + (1)^3 - 3.a.(-b).1$

$= (a - b + 1)\ \{a^2 + (-b)^2 + (1)^2 - a.(-b) - (-b).1 - 1.a\}$

$= (a - b + 1)\ (a^2 + b^2 + 1 + ab + b - a)$

(iii) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

ধরি, $a - b = x$, $b - c = y$ এবং $c - a = z$

সুতরাং, $x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$

$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

$= x^3 + y^3 + z^3$

$= 3xyz$ [যেহেতু, $x + y + z = 0$, সুতরাং, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$]

$= 3\ (a - b)\ (b - c)\ (c - a)$

(iv) $a^6 + 5a^3 + 8$

$a^6 + 5a^3 + 8$

$= (a^2)^3 + (?)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(?).2$

যেহেতু মধ্যপদটি $5a^3$,

সুতরাং '?' টি $\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a$.......এদের মধ্যে একটি হবে।

যদি '?' = a বসাই তাহলে হয়, $(a^2)^3 + (a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(a).2$

কিন্তু এখানে $+ 5a^3$ না হয়ে $- 5a^3$ হচ্ছে।

যদি '?' = – a বসাই তাহলে হয়, $(a)^2 + (-a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(-a).2$

এক্ষেত্রে মধ্যপদ ($+ 5a^3$) হচ্ছে।

$a^6 + 5a^3 + 8$

$= (a^2)^3 + (-a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(-a).2$

$= \{a^2 + (-a) + 2\}\ \{(a^2)^2 + (-a)^2 + (2)^2 - a^2(-a) - (-a).2 - 2.a^2\}$

$= (a^2 - a + 2)\ (a^4 + a^2 + 4 + a^3 + 2a - 2a^2)$

$= (a^2 - a + 2)\ (a^4 + a^3 - a^2 + 2a + 4)$

কষে দেখি—8.4

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

1. $x^3 + y^3 - 12xy + 64$
2. $8x^3 - y^3 + 1 + 6xy$
3. $8a^3 - 27b^3 - 1 - 18ab$
4. $1 + 8x^3 + 18xy - 27y^3$
5. $(3a - 2b)^3 + (2b - 5c)^3 + (5c - 3a)^3$
6. $(2x - y)^3 - (x + y)^3 + (2y - x)^3$
7. $a^6 + 32a^3 - 64$
8. $a^6 - 18a^3 + 125$
9. $p^3(q - r)^3 + q^3(r - p)^3 + r^3(p - q)^3$
10. $p^3 + \frac{1}{p^3} + \frac{26}{27}$

উৎপাদকে বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ লিখি।

17 কিন্তু এই অভেদের আকারে না লিখে অন্য আকারে $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ -কে লেখা যায় কিনা দেখি।

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} \times 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

18 আমি নিষাদকে $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ -এর মান বের করতে বললাম যখন

$a = 999, b = 998, c = 997$

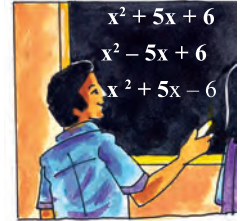
নিষাদ লিখল, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\ \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$$= \frac{1}{2}(999 + 998 + 997)\{(999 - 998)^2 + (998 - 997)^2 + (997 - 999)^2\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 2994 \times (1 + 1 + 4)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2994 \times 6 = 8982$$

জাকির একটি বোর্ডে লিখল $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ——— XII

19 পল্লব ব্ল্যাকবোর্ডে চারটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 - 5x + 6$ (iii) $x^2 + 5x - 6$ (iv) $x^2 - 5x - 6$

আমি এই বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি ।

(i) $x^2 + 5x + 6$
$= x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x(x + 3) + 2(x + 3)$
$= (x + 3)(x + 2)$

(ii) $x^2 - 5x + 6$
$= x^2 - 3x - 2x + 6$
$= x(x - 3) - 2(x - 6)$
$= (x - 3)(x - 2)$

(iii) $x^2 + 5x - 6$
$= x^2 + 6x - x - 6$
$= x(x + 6) - 1(x + 6)$
$= (x + 6)(x - 1)$

(iv) $x^2 - 5x - 6$
$= x^2 - 6x + x - 6$
$= x(x - 6) + 1(x - 6)$
$= (x - 6)(x + 1)$

20 জাকির ব্ল্যাকবোর্ডে আরো কয়েকটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল।

(i) $p^2 + p - (a + 1)(a + 2)$ (ii) $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$

(iii) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$ (iv) $x^2 + (p + \frac{1}{p})x + 1$

(v) $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1) - 4x^2$ (vi) $x^2 - bx - (a + 3b)(a + 2b)$

(vii) $2x^2 - 3ab - (a - 6b)x$ (viii) $x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2$

পল্লব, জাকিরের লেখা বহুপদী সংখ্যামালাগুলির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করল।

(i) $p^2 + p - (a + 1)(a + 2)$

$= p^2 + \{(a + 2) - (a + 1)\}p - (a + 1)(a + 2)$

$= p^2 + (a + 2)p - (a + 1)p - (a + 1)(a + 2)$

$= p(p + a + 2) - (a + 1)(p + a + 2)$

$= (p + a + 2)\{p - (a + 1)\}$

$= (p + a + 2)(p - a - 1)$

(ii) $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$

$= x^2 + 3x - (a^2 + a - 2)$

$= x^2 + 3x - (a^2 + 2a - a - 2)$

$= x^2 + 3x - \{a(a + 2) - 1(a + 2)\}$

$= x^2 + 3x - (a + 2)(a - 1)$

$= x^2 + \{(a + 2) - (a - 1)\}x - (a + 2)(a - 1)$ $[\because (a + 2) - (a - 1) = a + 2 - a + 1 = 3]$

$= x^2 + (a + 2)x - (a - 1)x - (a + 2)(a - 1)$

$= x(x + a + 2) - (a - 1)(x + a + 2)$

$= (x + a + 2)\{x - (a - 1)\}$

$= (x + a + 2)(x - a + 1)$

(iii) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$

$= (x - 1)(x + 3)(x - 2)(x + 4) + 6$

$= (x^2 - x + 3x - 3)(x^2 - 2x + 4x - 8) + 6$

$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) + 6$

$= (a - 3)(a - 8) + 6$ [ধরি, $x^2 + 2x = a$]

$= a^2 - 3a - 8a + 24 + 6$

$= a^2 - 11a + 30$

$= a^2 - 6a - 5a + 30$

$= a(a - 6) - 5(a - 6)$

$= (a - 6)(a - 5)$

$= (x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x - 5)$ [যেহেতু, $a = x^2 + 2x$]

(iv) $x^2 + \left(p + \frac{1}{p}\right)x + 1$

$= x^2 + px + \frac{x}{p} + \frac{p}{p}$ [যেহেতু, $\frac{p}{p} = 1$]

$= x(x+p) + \frac{1}{p}(x+p)$

$= (x+p)\left(x + \frac{1}{p}\right)$

(v) $(x^2+1)^2 - (x^2-1) - 4x^2$

$= (x^2-1)^2 + 4.\ x^2.1 - (x^2-1) - 4x^2$ [যেহেতু, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$]

$= (x^2-1)^2 + 4x^2 - (x^2-1) - 4x^2$

$= (x^2-1)(x^2-1-1)$

$= (x+1)(x-1)(x^2-2)$

(vi) $x^2 - bx - (a+3b)(a+2b)$

$= x^2 - \{(a+3b)-(a+2b)\}x - (a+3b)(a+2b)$ [যেহেতু, $(a+3b)-(a+2b)$ $= a + 3b - a - 2b = b$]

$= x^2 - (a+3b)x + (a+2b)x - (a+3b)(a+2b)$

$= x\{x-(a+3b)\} + (a+2b)\{x-(a+3b)\}$

$= \{x-(a+3b)\}\{x+(a+2b)\}$

$= (x-a-3b)(x+a+2b)$

(vii) $2x^2 - 3ab - (a-6b)x$

$= 2x^2 - 3ab - ax + 6bx$

$= 2x^2 - ax + 6bx - 3ab$

$= x(2x-a) + 3b(2x-a)$

$= (2x-a)(x+3b)$

(viii) $x^2 + 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)^2$

$= x^2 + 2(a^2+b^2)x + \{(a+b)(a-b)\}^2$

$= x^2 + 2(a^2+b^2)x + (a+b)^2(a-b)^2$

$= x^2 + \{(a+b)^2 + (a-b)^2\}x + (a+b)^2(a-b)^2$ [যেহেতু, $(a+b)^2 + (a-b)^2$ $= 2(a^2+b^2)$]

$= x^2 + (a+b)^2x + (a-b)^2x + (a+b)^2(a-b)^2$

$= x\{x+(a+b)^2\} + (a-b)^2\{x+(a+b)^2\}$

$= \{x+(a+b)^2\}\{x+(a-b)^2\}$

$= (x+a^2+2ab+b^2)(x+a^2-2ab+b^2)$

কষে দেখি—8.5

1. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $(a+b)^2 - 5a - 5b + 6$

(ii) $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4) + 12$

(iii) $x(x^2-1)(x+2) - 8$

(iv) $7(a^2+b^2)^2 - 15(a^4-b^4) + 8(a^2-b^2)^2$

(v) $(x^2-1)^2 + 8x(x^2+1) + 19x^2$

(vi) $(a-1)x^2 - x - (a-2)$

(vii) $(a-1)x^2 + a^2xy + (a+1)y^2$

(viii) $x^2 - qx - p^2 + 5pq - 6q^2$

(ix) $2(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (a - \frac{1}{a}) - 7$

(x) $(x^2 - x)y^2 + y - (x^2 + x)$

2. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q):

(i) $a^2 - b^2 = 11 \times 9$ এবং a ও b ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $(a > b)$ হলে,

(a) $a = 11, b = 9$ (b) $a = 33, b = 3$ (c) $a = 10, b = 1$ (d) $a = 100, b = 1$

(ii) যদি $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$ হয়, তাহলে $a^3 + b^3$ -এর মান

(a) 1 (b) a (c) b (d) 0

(iii) $25^3 - 75^3 + 50^3 + 3 \times 25 \times 75 \times 50$-এর মান

(a) 150 (b) 0 (c) 25 (d) 50

(iv) $a + b + c = 0$ হলে, $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(v) $x^2 - px + 12 = (x-3)(x-a)$ একটি অভেদ হলে, a ও p এর মান যথাক্রমে

(a) $a = 4, p = 7$ (b) $a = 7, p = 4$ (c) $a = 4, p = -7$ (d) $a = -4, p = 7$

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) $\frac{(b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3 + (a^2-b^2)^3}{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}$ -এর সরলতম মান লিখি।

(ii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ এবং $a + b + c \neq 0$ হলে, a, b ও c -এর মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

(iii) $a^2 - b^2 = 224$ এবং a ও b $(a < b)$ ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, a ও b -এর মান লিখি।

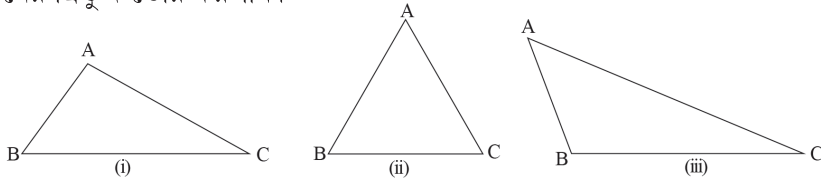
(iv) $3x = a + b + c$ হলে, $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c)$ -এর মান কত লিখি।

(v) $2x^2 + px + 6 = (2x-a)(x-2)$ একটি অভেদ হলে, a ও p -এর মান কত লিখি।

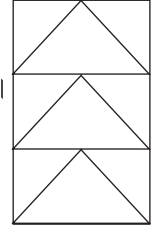
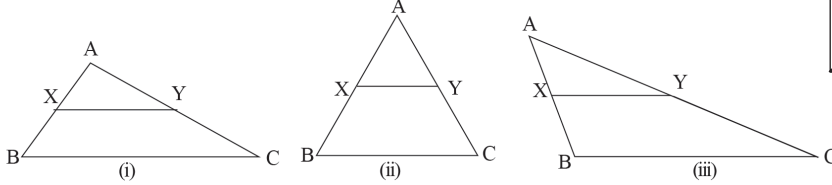
9 ভেদক ও মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য
(TRANSVERSAL & MID-POINT THEOREMS)

কলেজ স্ট্রিটে আমার বড়োপিসিমা থাকেন। গতকাল বড়োপিসিমার বাড়ি বেড়াতে গিয়েছিলাম। গঙ্গার উপরের ব্রিজটি অতিক্রম করার সময়ে আমি খুব মন দিয়ে ব্রিজের নানান জ্যামিতিক আকারগুলি লক্ষ করেছি। ব্রিজটি খুব সুন্দর দেখতে লাগছিল। তখনই ঠিক করেছিলাম বাড়ি ফিরে আমি ছোটো বড়ো নানান মাপের কাঠি দিয়ে ব্রিজ তৈরির চেষ্টা করব।

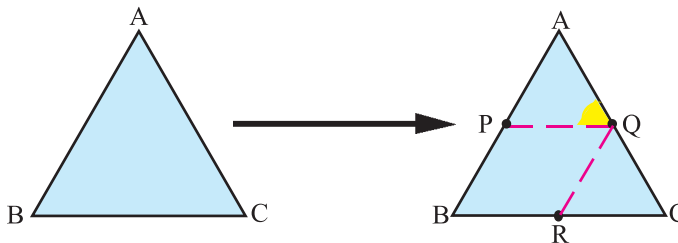
তাই আজ আমি ও আমার তিন বন্ধু মিলে ব্রিজ তৈরির চেষ্টা করছি।

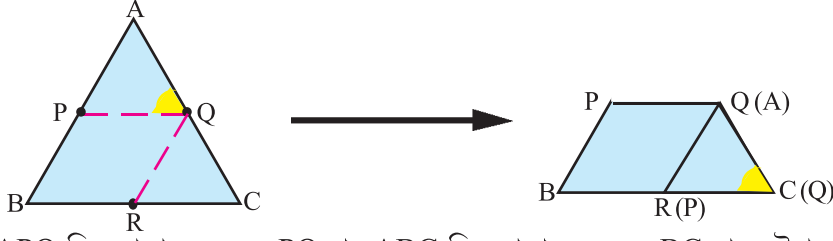
দেখছি, ব্রিজে অনেকগুলি ত্রিভুজের মতো আকার আছে। তাই আমি কাঠিগুলি দিয়ে ছোটো বড়ো নানা মাপের ও নানান ধরনের ত্রিভুজ তৈরি করলাম।

আয়েশা কয়েকটি ত্রিভুজ জুড়ে জুড়ে খানিকটা ব্রিজের মতো আকার তৈরি করল।

কিন্তু তুষার অন্য কাঠি দিয়ে এই ত্রিভুজগুলির দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু বরাবর দড়ি দিয়ে বেঁধে দিল।

তুষার করল,

1 মেপে দেখছি প্রতিক্ষেত্রেই XY কাঠিটির দৈর্ঘ্য BC কাঠির দৈর্ঘ্যের অর্ধেক। কিন্তু এভাবে লাগানোর পরে BC কাঠিটি কি XY কাঠির সমান্তরাল আছে? হাতেকলমে যাচাই করে দেখি কী পাই?

হাতেকলমে

1. প্রথমে সাদা কাগজে একটি ত্রিভুজ ABC আঁকলাম এবং ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।
2. এবার কাগজ ভাঁজ করে ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু P ও Q পেলাম।

3. এবার কাগজ ভাঁজ করে PQসরলরেখাংশ পেলাম এবং $\angle AQP$ টি রঙিন করলাম।
4. এবার কাগজ ভাঁজ করে BC বাহুর মধ্যবিন্দু R পেলাম।

5. এবার APQ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে PBCQ চতুর্ভুজের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে ছবির মতো A বিন্দু Q বিন্দুর উপর বসে এবং AQ , QC -র সঙ্গে মিশে যায়।

দেখছি, APQ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের PQ বাহু ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের BC বাহুর উপর সমাপতিত হয়েছে। কিন্তু এখানে PQ ও BC সরলরেখাংশ সমাপতিত হওয়ায়

$$PQ \,||\, BC$$

আবার দেখছি, P বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু R এর সাথে মিশে গেছে।

$$\therefore\ PQ = RC = \frac{1}{2}\ BC$$

হাতেকলমে পেলাম, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। সুতারাং, তুষারের রাখা XY কাঠিটি BC কাঠিটির সমান্তরালে আছে।

উপপাদ্য- 20 কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

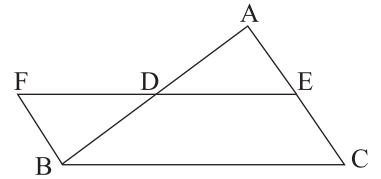
প্রদত্ত : ধরা যাক, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু E;
D ও E যুক্ত করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) DE || BC এবং (ii) DE = $\frac{1}{2}$ BC

অঙ্কন : ED কে F বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন ED = DF হয়। B ও F বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : Δ ADE এবং Δ BDF -এ AD = BD [স্বীকার]
$\angle$ ADE = $\angle$ BDF [বিপ্রতীপ কোণ]
DE = DF [অঙ্কনানুসারে]
$\therefore$ Δ ADE $\cong$ ΔBDF [S-A-S শর্তানুসারে]
$\therefore$ AE = BF [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]
কিন্তু, AE = CE [স্বীকার]
$\therefore$ BF = CE
এবং $\angle$DAE = $\angle$DBF; কিন্তু এরা একান্তর কোণ।
$\therefore$ BF || AE; অর্থাৎ, BF || CE

BCEF চতুর্ভুজের BF || CE এবং BF = CE

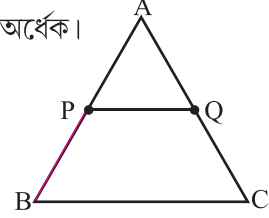
$\therefore$ BCEF একটি সামান্তরিক [BCEF চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল]
$\therefore$ FE || BC; অর্থাৎ, DE || BC (প্রমাণিত)
এবং, BC = EF = DE + DF = DE + DE = 2DE ($\because$ DE = DF)
$\therefore$ DE = $\frac{1}{2}$ BC (প্রমাণিত)।

2 PQR ত্রিভুজের PQ এবং PR-বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y; X, Y বিন্দু দুটি যোগ করলাম। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, XY || QR এবং $XY = \frac{1}{2}$ QR [নিজে করি]

প্রয়োগ 1 আয়েশা একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.; AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q; PQ - এর দৈর্ঘ্য এবং ∠APQ-এর মান হিসাব করে লিখি।

ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

$PQ = \frac{1}{2}$ $BC = \frac{1}{2} \times 8$ সেমি. = ☐ সেমি.

PQ || BC.

∠APQ = অনুরূপ ∠ABC = 60° [∵ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

প্রয়োগ 2 যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি. হতো, তাহলে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু P ও Q এর সংযোজক সরলরেখাংশ PQ-এর দৈর্ঘ্য ও ∠APQ-এর মান লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ 3 জাকির একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার AB, BC, CA বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু তিনটি যথাক্রমে P, Q, R। প্রমাণ করি যে PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ

প্রমাণ : Δ ABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও R

∴ $PR = \frac{1}{2}$ BC ....(i)

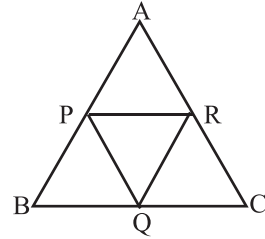
একইভাবে, $PQ = \frac{1}{2}$ CA ....(ii)

এবং $QR = \frac{1}{2}AB$ ....(iii)

যেহেতু, AB = BC = CA [∵ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

সুতরাং, $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ CA

∴ QR = PR= PQ

∴ PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ

প্রয়োগ 4 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক পাবো।

প্রদত্ত : ধরি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA-র মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে P, Q, R ও S; P, Q ; Q, R; R, S ও S, P যোগ করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে: PQRS একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : BD কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : Δ ABD-এর AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও S ;

∴ PS || BD এবং $PS = \frac{1}{2}$ BD.

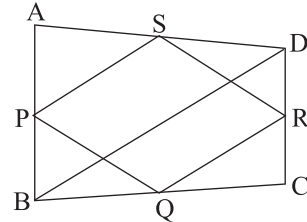
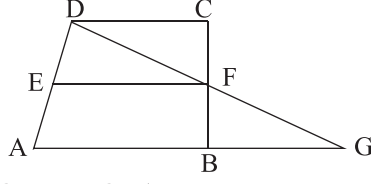
একইভাবে, ΔCBD-এর CB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে ☐ ও ☐

∴ QR || BD এবং $QR = \frac{1}{2}$ BD.

যেহেতু PS || BD এবং QR || BD, সুতরাং PS || QR.

$PS = \frac{1}{2}$ ☐ এবং $QR = \frac{1}{2}$ BD, সুতরাং PS = QR

পেলাম, PQRS চতুর্ভুজের PS || QR এবং PS = QR

PQRS একটি ☐ [যেহেতু PQRS চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল।]

প্রয়োগ 5 আয়েশা ABCD ট্রাপিজিয়াম এঁকেছে যার দুটি তির্যক বাহু AD ও BC -এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F; আমি প্রমাণ করি যে $EF \,||\, AB$ এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

প্রদত্ত : ABCD ট্রপিজিয়ামের তির্যক বাহু AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $EF \,||\, AB$ এবং (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

অঙ্কন : D, F যুক্ত করে এমনভাবে বর্ধিত করলাম যা বর্ধিত AB বাহুকে কে G বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : Δ DFC ও Δ BFG-এর মধ্যে, $\angle CFD$ = বিপ্রতীপ $\angle BFG$

$\angle FCD$ = একান্তর $\angle FBG$ [$\because DC || AB$, অর্থাৎ $DC || AG$, BC ভেদক; সুতরাং $\angle BCD$ = একান্তর $\angle CBG$]

$CF = BF$ [$\because$ F, BC বাহুর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \Delta DFC \cong \Delta BFG$ [সর্বসমতার A-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, $DC = BG$ এবং $DF = FG$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

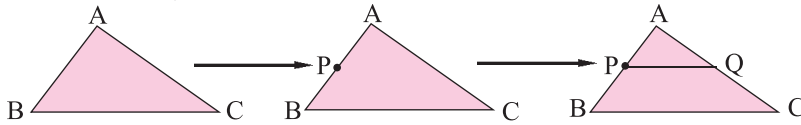
ΔADG -এর AD ও AG-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F

$\therefore EF \,||\, AG$; অর্থাৎ $EF \,||\, AB$ এবং $EF = \frac{1}{2} AG$

$= \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + DC)$ (প্রমাণিত)

আমরা হাতে কলমে বিভিন্ন ধরনের ত্রিভুজ এঁকে মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত অপর উপপাদ্যটি যাচাই করার চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

(1) প্রথমে যেকোনো ধরনের একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC এঁকে কেটে নিলাম।
(2) এবার কাগজ ভাঁজ করে AB-এর মধ্যবিন্দু P নিলাম।
(3) এরপরে AB-এর P বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ PQ আঁকলাম।

(4) কাগজ ভাঁজ করে দেখছি AC-এর মধ্যবিন্দু ও Q একই বিন্দু অর্থাৎ Q, AC -এর মধ্যবিন্দু।

(5) আগের মতো APQ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে PBCQ এর উপর বসাই যাতে A বিন্দু Q বিন্দুতে এবং AQ ও QC সমাপতিত হয়। পেলাম $PQ = \frac{1}{2} BC$

হাতেকলমে পেলাম 'যেকোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।'

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য- 21 কোনো ত্রিভুজের যে কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।

প্রদত্ত : ধরা যাক, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC এর সমান্তরাল DE টানা হল যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ করতে হবে যে: $AE = CE$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

অঙ্কন : ED কে F বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম, যেন ED=DF হয়। B ও F বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBDF -এর মধ্যে

$AD = BD$ [স্বীকার]

$\angle ADE = \angle BDF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$DE = DF$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta BDF$ [S-A-S শর্তানুসারে]

$\therefore AE = FB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

এবং $\angle DAE = \angle DBF$, কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

$\therefore AE \parallel BF$ বা $CE \parallel BF$

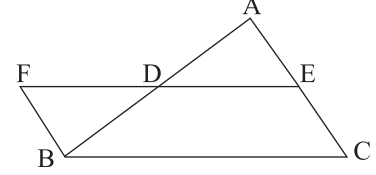
আবার, $EF \parallel BC$ [স্বীকার]

$\therefore$ BCEF চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

সুতরাং, $BC = FE$ এবং $BF = CE$; কিন্তু $FB = AE$

$\therefore AE = CE$ (প্রমাণিত)

আবার, $BC = EF = DF + DE = DE + DE$ [$\because DF = DE$] $= 2DE$

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)।

শাকিল এক মজার কাজ করল, সে এই প্রমাণিত 21 নং উপপাদ্যের সাহায্যে অন্যভাবে 20 নং উপপাদ্যটি প্রমাণ করল।

আমি এখন অন্যভাবে প্রমাণ করব যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু দুটি যথাক্রমে D ও E; D, E যুক্ত করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$

অঙ্কন : AC বাহুর মধ্যবিন্দু E দিয়ে AB বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ টানলাম যা BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : E, AC-এর মধ্যবিন্দু এবং $EF \parallel AB$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ F, BC-এর মধ্যবিন্দু। অর্থাৎ $BF = \frac{1}{2}BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}AB$

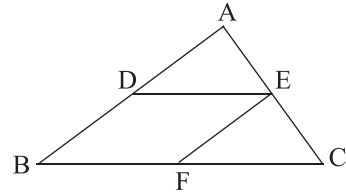
সুতরাং, $EF = \frac{1}{2}AB = DB$ [$\because$ D, AB -এর মধ্যবিন্দু]

চতুর্ভুজ DBFE-এর

$EF = DB$ এবং $EF \parallel DB$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ DBFE একটি সামান্তরিক।

সুতরাং, $DE \parallel BF$; অর্থাৎ $DE \parallel BC$ [(i) নং প্রমাণিত]

$DE = BF = \frac{1}{2}BC$ [(ii) নং প্রমাণিত]

প্রয়োগ 6 ABCD ট্রাপিজিয়মের $AB \mid\mid DC$ এবং E, AD-এর মধ্যবিন্দু। যদি E বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা BC কে F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে,

(i) F, BC-এর মধ্যবিন্দু এবং (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7 আয়েশা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল যার $\angle BAC$ সমকোণ এবং অতিভুজ BC-এর মধ্যবিন্দু D; আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $AD = \frac{1}{2} BC$

প্রদত্ত : ΔABC-এর $\angle BAC = 90^\circ$ এবং BC-এর মধ্যবিন্দু D

প্রমাণ করতে হবে যে: $AD = \frac{1}{2} BC$

অঙ্কন : D বিন্দু দিয়ে AC-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা AB বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D (প্রদত্ত) এবং $DE \| AC$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ E, AB বাহুর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, $AE = EB$ —— (i)

আবার, $AC \| DE$ এবং AB ভেদক,

$\therefore$ $\angle DEB =$ অনুরূপ $\angle CAB = 90^\circ$

ΔAED ও ΔDEB-এর মধ্যে

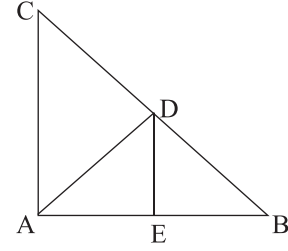
$AE = EB$

$\angle AED = \angle DEB = 90^\circ$

এবং DE সাধারণ বাহু

$\therefore$ $\Delta AED \cong \Delta DEB$ [সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, $AD = DB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

$\therefore$ $AD = DB = \frac{1}{2} BC$ [$\because$ D,BC-এর মধ্যবিন্দু]

প্রয়োগ : 8 ΔABC -এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE, AC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AF = \frac{1}{3} AC$

প্রদত্ত : ΔABC -এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE, AC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: $AF = \frac{1}{3} AC$

অঙ্কন : D বিন্দু দিয়ে BF-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা AC বাহুকে G বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔBFC-এর D, BC-এর মধ্যবিন্দু [$\because$ AD মধ্যমা]

এবং $DG \| BF$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ G , FC-এর মধ্যবিন্দু

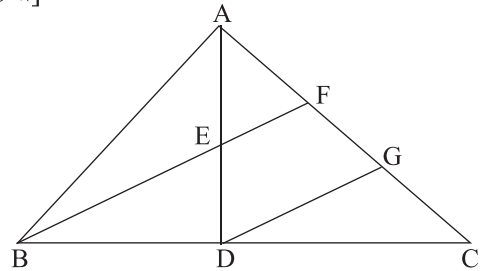
সুতরাং, $FG = GC$ —— (i)

আবার, ΔADG-এর AD বাহুর মধ্যবিন্দু E [প্রদত্ত]

এবং $EF \| DG$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore$ F, AG -এর মধ্যবিন্দু

সুতরাং, $AF = FG$ —— (ii)

$\therefore$ $AF = FG = GC$ সুতরাং, $AF = \frac{1}{3} AC$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 9 ABCD সামান্তরিকের AB ও DC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে E এবং F; A, F ও C, E যোগ করলাম যা BD কর্ণকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে, AF ও CE, BD কর্ণকে সমত্রিখণ্ডিত করেছে।

সংকেত : ABCD সামান্তরিকের $AB \parallel DC$ এবং $AB = DC$

$\therefore AE \parallel FC$ এবং $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$

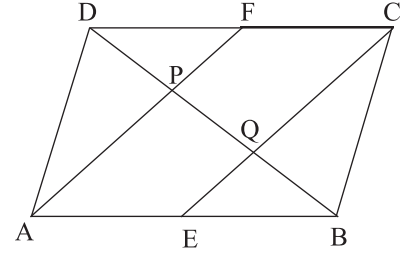
অর্থাৎ, $AE = FC$

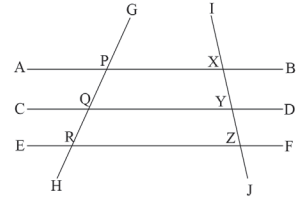
$\therefore$ AECF একটি সামান্তরিক ($\because AE \parallel FC$ এবং $AE = FC$)

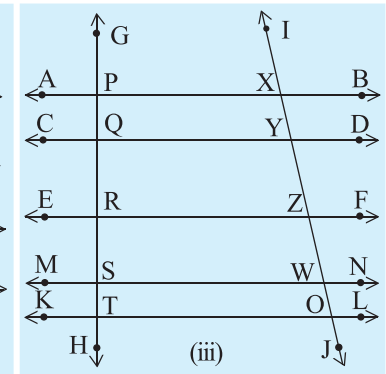
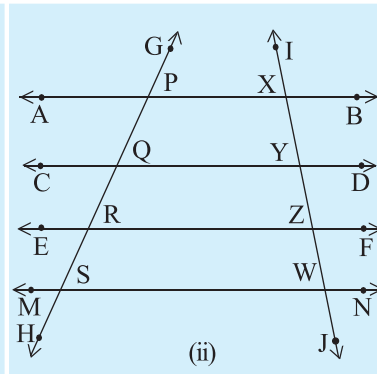
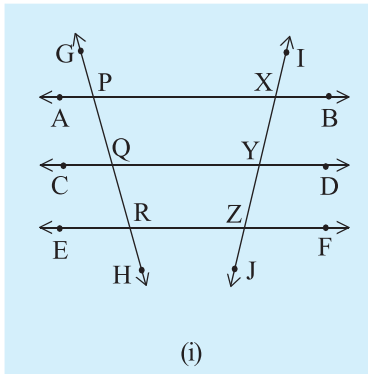
সুতরাং, $AF \parallel EC$

মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে

$BQ = QP$ এবং $QP = PD$ এই প্রমাণটি নিজে করি

$\therefore BQ = QP = PD$

আমরা যখন সবাই মিলে কাঠি দিয়ে ব্রিজ তৈরি করছি, ত্রিভুজ আঁকছি, ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রবিশিষ্ট কাগজ কেটে ভাঁজ করে তার বাহুর মধ্যবিন্দু ও ভেদকের সম্পর্ক হাতে কলমে যাচাই করতে ব্যস্ত, তখন আমার মামাতো ভাই কুণাল বাড়ির সামনের মাঠে বাঁশের প্যান্ডেল দেখে সেইরকমভাবে একটি আয়তাকার কাগজকে সমান চারভাঁজ করল। তারপর কাগজটিকে তির্যকভাবে ভাঁজ করে নীচের ছবির মতো পেল।

দেখছি, AB, CD, EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখাংশ ও GH সরলরেখাংশ AB, CD, ও EF-এর দ্বারা যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে দুটি সমান অংশে ভাগ হয়েছে। অর্থাৎ $PQ = QR$ এবং মেপে দেখছি IJ সরলরেখাংশটিও এই তিনটি সমান্তরাল সরলরেখাংশ দ্বারা XY ও YZ দুটি সমান সমান অংশে খণ্ডিত হয়েছে।

কিন্তু সবসময়ে কি এটা সম্ভব? অর্থাৎ তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যদি কোনো একটি ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে তবে অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে? ছবি এঁকে মাপ নিয়ে হাতেকলমে যাচাই করি।

আমরা অনেকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের ভেদকের ছবি এঁকেছি। সেগুলি হলো,

সমান্তরাল সরলরেখাগুলির প্রতিটি ভেদক থেকে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্যের মাপ নিয়ে নীচের ছকে লিখলাম।

ছবি	সমান্তরাল সরলরেখা	GH ভেদক থেকে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য [মাপ নিয়ে পেলাম]	IJ ভেদক থেকে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য [মাপ নিয়ে পেলাম]	সিদ্ধান্ত
(i) নং ছবি	AB, CD ও EF	PQ = QR = ☐	XY = YZ = ☐	AB, CD, EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি GH থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করলে, IJ থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।
(ii) নং ছবি	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি
(iii) নং ছবি	AB, CD,EF, MN ও KL	সকল খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য সমান নয়।	সকল খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য সমান নয়।	AB, CD, EF MN ও KL 5টি সমান্তরাল সরলরেখা GH ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত না করায় অপর ভেদক IJ থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করেনি।
(iv) নং ছবি একইরকম কতকগুলি (তিনের বেশি) সমান্তরাল সরলরেখা আঁকি ও দুটি ভেদক এঁকে যাচাই করি। [নিজে করি]				

3 আমি যে কোনো 4টি এমন পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যারা একটি ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করেছে। এই 4টি সমান্তরাল সরলরেখার অপর একটি ভেদক টেনে মাপ নিয়ে দেখলাম এই ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করেছে। [নিজে করি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যদি তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যে-কোনো ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে তাহলে তারা অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।

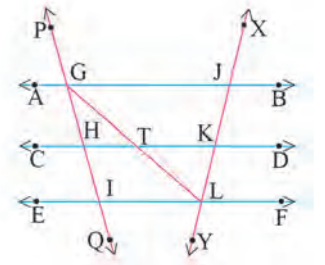
যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য- 22 যদি তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যে-কোনো ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে তাহলে তারা অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।

প্রদত্ত : AB, CD এবং EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি PQ ভেদক থেকে GH ও HI দুটি সমান অংশ খণ্ডিত করেছে। অর্থাৎ GH=HI; ওই সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি অপর একটি ভেদক XY থেকেও JK ও KL দুটি অংশ খণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: JK= KL

অঙ্কন : G ও L বিন্দু দুটি যোগ করলাম যা CD সরলরেখাকে T বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔGIL-এর, H, GI-এর মধ্যবিন্দু [$\because$ GH = HI, প্রদত্ত]
এবং HT || IL [প্রদত্ত]
$\therefore$ T, GL-এর মধ্যবিন্দু।
আবার, ΔGLJ-এর, T, GL-এর মধ্যবিন্দু এবং TK || GJ [প্রদত্ত]
$\therefore$ K, JL-এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore$ JK = KL (প্রমাণিত)

[উপপাদ্য: 22-এর প্রমাণ মূল্যায়ণের অন্তর্ভুক্ত নয়।]

কষে দেখি— 9

1. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; D বিন্দু দিয়ে CA এবং BA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ BA এবং CA বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $EF = \frac{1}{2}BC$

2. D এবং E বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর উপর এমনভাবে অবস্থিত যে, $AD = \frac{1}{4}AB$ এবং $AE = \frac{1}{4}$ AC; প্রমাণ করি যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{4}BC$

3. X এবং Z যথাক্রমে PQR ত্রিভুজের QR এবং QP বাহুর মধ্যবিন্দু। QP বাহুকে S বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যাতে PS = ZP হয়। SX, PR বাহুকে Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $PY = \frac{1}{4}PR$

4. প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিকের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয়, সেটি একটিসামান্তরিক।

5. প্রমাণ করি যে, একটি আয়তাকার চিত্রের বাহুগুলির মধ্যেবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটি রম্বস, কিন্তু বর্গাকার চিত্র নয়।

6. প্রমাণ করি যে, একটি বর্গাকার চিত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটি বর্গাকার চিত্র।

7. প্রমাণ করি যে, একটি রম্বসের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটিআয়তাকার চিত্র।

8. ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E ; P এবং Q যথাক্রমে CD ও BD -এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করি যে, BE এবং PQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

9. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর AD লম্ব। D বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ DE টানা হলো যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, AE = EC

10. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা। B ও C বিন্দু দিয়ে AD-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ BR এবং CT টানা হলো যারা বর্ধিত BA এবং CA বাহুর সঙ্গে যথাক্রমে T এবং R বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\frac{1}{AD} = \frac{1}{RB} + \frac{1}{TC}$

11. ABCD ট্রাপিজিয়ামের $AB \parallel DC$ এবং $AB > DC$; E এবং F যথাক্রমে কর্ণদ্বয় AC ও BD-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করি যে, $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

12. AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু C এবং PQ যেকোনো একটি সরলরেখা। A, B ও C বিন্দু থেকে PQ সরলরেখার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব যথক্রমে AR, BS এবং CT ; প্রমাণ করি যে, AR + BS = 2CT

13. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; A বিন্দু দিয়ে PQ যেকোনো একটি সরলরেখা। B, C এবং D বিন্দু থেকে PQ সরলরেখার উপর লম্ব যথাক্রমে BL, CM এবং DN ; প্রমাণ করি যে, DL = DM.

14. ABCD একটি বর্গাকার চিত্র। AC এবং BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle$BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক BO-কে P বিন্দুতে এবং BC -কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $OP = \frac{1}{2}CQ$

15. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) PQR ত্রিভুজে $\angle PQR = 90^\circ$ এবং PR = 10 সেমি.। PR বাহুর মধ্যবিন্দু S হলে, QS-এর দৈর্ঘ্য

(a) 4 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 3 সেমি.

(ii) ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং AB = 7 সেমি. ও DC = 5 সেমি.। AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হলে, EF-এর দৈর্ঘ্য

(a) 5 সেমি. (b) 7 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 12 সেমি.

(iii) ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E ; বর্ধিত BE, AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। AC = 10.5 সেমি. হলে, AF-এর দৈর্ঘ্য

(a) 3 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 2.5 সেমি. (d) 3.5 সেমি.

(iv) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F; BE ও DF, X বিন্দুতে এবং CF ও DE, Y বিন্দুতে ছেদ করলে, XY-এর দৈর্ঘ্য সমান

(a) $\frac{1}{2}BC$ (b) $\frac{1}{4}BC$ (c) $\frac{1}{3}BC$ (d) $\frac{1}{8}BC$

(v) ABCD সামান্তরিকের BC বাহুর মধ্যবিন্দু E ; DE এবং বর্ধিত AB, F বিন্দুতে মিলিত হয়। AF-এর দৈর্ঘ্য সমান

(a) $\frac{3}{2}AB$ (b) 2AB (c) 3AB (d) $\frac{5}{4}AB$

16. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) ABC ত্রিভুজের AD এবং BE মধ্যমা এবং BE-এর সমান্তরাল সরলরেখা DF, AC বাহুর সঙ্গে F বিন্দুতে মিলিত হয়। AC বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি. হলে, CF বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R; যদি AC = 21 সেমি., BC = 29 সেমি. এবং AB = 30 সেমি. হয়, তাহলে ARPQ চতুর্ভুজের পরিসীমা লিখি।

(iii) ABC ত্রিভুজের AC বাহুর উপর D যে-কোনো একটি বিন্দু। P, Q, X, Y, যথাক্রমে AB, BC, AD এবং DC-এর মধ্যবিন্দু। PX = 5 সেমি. হলে, QY-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iv) ABC ত্রিভুজের BE ও CF মধ্যমা G বিন্দুতে ছেদ করে। P এবং Q যথাক্রমে BG এবং CG-এর মধ্যবিন্দু। PQ = 3 সেমি. হলে, BC -এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(v) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F ; FE, AD -কে O বিন্দুতে ছেদ করে। AD = 6 সেমি. হলে, AO-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

10 লাভ ও ক্ষতি
(PROFIT AND LOSS)

18 জানুয়ারি আমাদের বিদ্যালয়ের প্রতিষ্ঠা দিবস। এ বছরে আমরা একটি প্রদর্শনীর আয়োজন করেছি। আমরা ঠিক করেছি যে প্রদর্শনীতে আমরা নিজেদের আঁকা ছবি ও নিজেদের হাতে তৈরি জিনিস বিক্রি করব।

সুপ্রিয়া 4 টাকা দরে 10 টি ছবি বিক্রি করল।

হিসাব করে দেখেছি প্রতিটা ছবি তৈরি করতে 2 টাকা খরচ হয়েছে।

∴ ওই 10 টি ছবির উৎপাদন খরচ 10 × 2 টাকা = 20 টাকা

কিন্তু, ওই 10 টি ছবি বিক্রি করে সুপ্রিয়া পেল 10 × 4 টাকা = 40 টাকা

∴ ওই 10 টি ছবি বিক্রি করে উৎপাদন খরচের বা কেনা দামের থেকে বেশি টাকা পেলাম।

বিক্রি করে কেনাদামের থেকে বেশি টাকা পাওয়াকে কী বলে?

কোনো জিনিস বিক্রি করে কেনা দামের থেকে বেশি টাকা পাওয়াকে **লাভ** বলা হয়।

এক্ষেত্রে কেনা দাম (ক্রয়মূল্য) = 20 টাকা , বিক্রির দাম (বিক্রয়মূল্য) = 40 টাকা [বিক্রি করে পেলাম]

∴ লাভ = 40 টাকা - 20 টাকা = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

সজল কিন্তু শাকিলচাচাকে 10 টি ছবির প্রতিটি ছবি 1 টাকা দরে বিক্রি করল।

এক্ষেত্রে, 10 টি ছবির বিক্রি দাম 10 × 1 টাকা = 10 টাকা

কিন্তু, ওই 10 টি ছবির কেনা দাম 10 × 2 টাকা = 20 টাকা

সজল এই 10 টি ছবি বিক্রি করে কেনা দামের থেকে কম টাকা পেল।

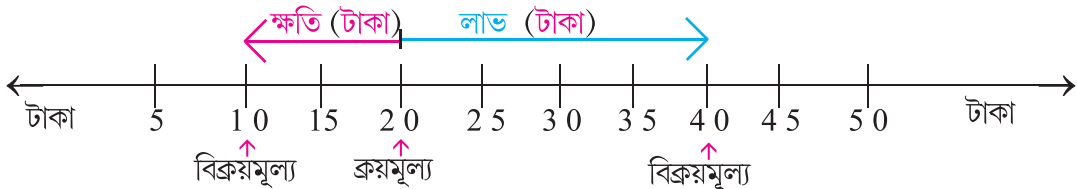
এইরকম বিক্রি করে কেনা দামের থেকে কম টাকা পাওয়াকে কী বলব?

কোনো জিনিস বিক্রি করে কেনা দামের থেকে কম টাকা পাওয়াকে **ক্ষতি** বলা হয়।

এক্ষেত্রে কেনা দাম (ক্রয়মূল্য) = 20 টাকা । বিক্রি দাম (বিক্রয়মূল্য) = ☐ টাকা

∴ ক্ষতি = 20 টাকা - 10 টাকা = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

আমি একটি সরলরেখায় লাভ ও ক্ষতি লেখার চেষ্টা করি।

দেখছি, বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য [>/< বসাই] হলে **লাভ** হয়।

এবং বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য [>/< বসাই] হলে **ক্ষতি** হয়।

1 আজ স্কুলে টিফিনের সময়ে আমি ও জয়ন্ত কিছু ফল কিনে আনলাম। আমি 6 টা পেয়ারা 25 টাকায় কিনলাম ও জয়ন্ত 6 টা কলা 10 টাকায় কিনল। আমাদের 6 জন বন্ধু আমাদের কেনা পেয়ারা ও কলা প্রত্যেকে সমান ভাগে ভাগ করে নিল। অর্থাৎ প্রত্যেক বন্ধু 1 টি পেয়ারা ও 1 টি কলা নিল এবং প্রত্যেকে 1 টি পেয়ারার জন্য 4 টাকা ও 1 টি কলার জন্য 2 টাকা আমাদের দিল।

1.1 হিসাব করে দেখি ফলগুলি বিক্রি করে আমরা কেনাদামের থেকে বেশি টাকা পেলাম না কম টাকা পেলাম।

আমি পেয়ারা কিনেছি $\square$ টাকায় কিন্তু বিক্রি করে পেলাম 4×6 টাকা = $\square$ টাকা।

যেহেতু বিক্রয়মূল্য $\square$ ক্রয়মূল্য [>/<]

$\therefore$ আমি পেয়ারা বিক্রি করে 25 টাকা – 24 টাকা = $\square$ টাকা $\square$ [লাভ/ক্ষতি] করলাম।

1.2 হিসাব করে দেখি পেয়ারা বিক্রি করে আমার শতকরা কত ক্ষতি হলো।

25 টাকায় ক্ষতি হলো 1 টাকা

1 টাকায় ক্ষতি হলো $\frac{1}{25}$ টাকা

100 টাকায় ক্ষতি হলো $\frac{1}{25} \times 100$ টাকা = 4 টাকা

বুঝেছি, পেয়ারা বিক্রি করে আমার 4% ক্ষতি হয়েছে

$\therefore$ পেলাম, শতকরা ক্ষতি = $\frac{\text{মোট ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100$

1.3 হিসাব করে দেখি কলা বিক্রি করে জয়ন্তর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো।

জয়ন্ত কলা কিনেছিল $\square$ টাকায়

কিন্তু, কলা বিক্রি করে জয়ন্ত পেল $\square \times \square$ টাকা = 12 টাকা

$\therefore$ কলা বিক্রি করে জয়ন্তর ($\square$ টাকা - $\square$ টাকা) = 2 টাকা $\square$ [লাভ/ক্ষতি] হলো।

জয়ন্ত 10 টাকায় লাভ করে 2 টাকা

$\therefore$ 1 টাকায় লাভ করে $\frac{1}{10}$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকায় লাভ করে $\frac{2 \times 100}{10}$ টাকা = 20 টাকা

তাই, জয়ন্ত কলা বিক্রি করে 20% লাভ করল।

$\therefore$ পেলাম, শতকরা লাভ = $\frac{\text{মোট লাভ}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100$

1.4 কিন্তু জয়ন্ত বিক্রয়মূল্যের উপর কত টাকা লাভ করল হিসাব করে লিখি।

12 টাকায় লাভ করে 2 টাকা

1 টাকায় লাভ করে $\frac{2}{12}$ টাকা

∴ 100 টাকায় লাভ করে $\frac{2}{12} \times 100$ টাকা $= \frac{50}{3}$ টাকা $= 16\frac{2}{3}$ টাকা

অর্থাৎ, বিক্রয়মূল্যের উপর লাভ করে $16\frac{2}{3}$ %

বিক্রয়মূল্য (টাকা)	লাভ (টাকা)
12	**2**
100	**?**

আমি অন্যভাবে সমানুপাতে হিসাব করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

যেহেতু, বিক্রয়মূল্য ও লাভ ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে,

∴ সরল সমানুপাতটি হলো, 12:100::2:? (নির্ণেয় লাভ)

∴ নির্ণেয় লাভ $= \frac{100}{12} \times 2$ % $= 16\frac{2}{3}$ %

1.5 নাসরিন একটি পেন বিক্রি করে বিক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ করে। ক্রয়মূল্যের উপর তাঁর শতকরা লাভ কত হলো হিসাব করি।

বিক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে লাভ হয় = 20 টাকা

∴ ক্রয়মূল্য (100 – 20) টাকা = 80 টাকা

80 টাকার উপর লাভ হয় 20 টাকা

1 টাকার উপর লাভ হয় $\frac{20}{80}$ টাকা

100 টাকার উপর লাভ হয় $100 \times \frac{20}{80}$ টাকা = 25 টাকা। ∴ নাসরিনের ক্রয়মূল্যের উপর লাভ 25%

1.6 10টি পেনের ক্রয়মূল্য 8টি পেনের বিক্রয়মূল্যের সমান হলে, শতকরা লাভ বা ক্ষতি হিসাব করি।

10টি পেনের ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে,

8টি পেনের বিক্রয়মূল্য হয় 100 টাকা।

1টি পেনের বিক্রয়মূল্য $\frac{100}{8}$ টাকা

10টি পেনের বিক্রয়মূল্য $10 \times \frac{100}{8}$ টাকা = 125 টাকা

∴ 10টি পেন বিক্রয় করে লাভ ☐ টাকা

∴ শতকরা লাভ = ☐

1.7 **ছক পূরণ করি:**

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি	বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ/ক্ষতি
400 টাকা	475 টাকা			
125 টাকা		25 টাকা লাভ		
750 টাকা		50 টাকা ক্ষতি		

আমাদের নসিবপুর গ্রামে সোফিয়াবিবি বাড়িতে আচার তৈরি করে কাঁচের ছোটো ছোটো শিশিতে ভরে গ্রামের বাজারে বিক্রি করেন।

আমি ঠিক করেছি সোফিয়াবিবির আচার তৈরি করতে কত খরচ পড়ল, অর্থাৎ আচারের উৎপাদন খরচ বা ক্রয়মূল্য এবং বিক্রয়মূল্য জানব।

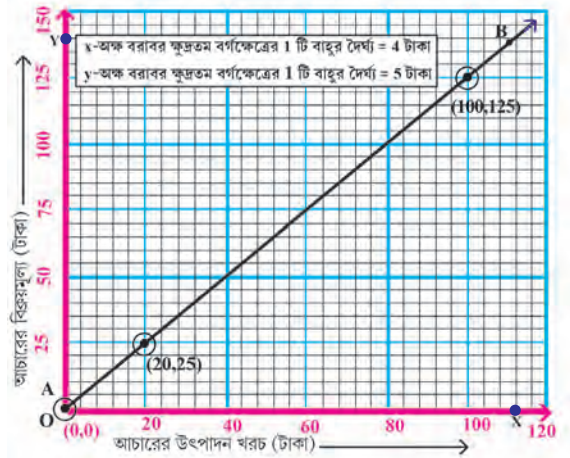
আমি হিসাব করে দেখছি, 1 শিশি আচারের উৎপাদন খরচ 20 টাকা।
কিন্তু সোফিয়াবিবি প্রতি শিশি আচার 25 টাকায় বিক্রয় করেন।

আমি সোফিয়াবিবির আচারের ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের ছক তৈরি করি।

আচারের ক্রয়মূল্য (টাকা)	0	20
আচারের বিক্রয়মূল্য (টাকা)	0	25

2 আমি ছক কাগজে উপরের সোফিয়াবিবির ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের তথ্যগুলির একটি লেখচিত্র আঁকি।

(1) প্রথমে ছক কাগজে দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা x-অক্ষ ও y-অক্ষ আঁকলাম।

(2) x-অক্ষ বরাবর আচারের উৎপাদন খরচ (টাকা) এবং y-অক্ষ বরাবর আচারের বিক্রয়মূল্য (টাকা) নিয়ে (0,0) ও (20,25) বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করে OB রশ্মি পেলাম।

লেখচিত্রটি থেকে কী কী তথ্য জানতে পারছি দেখি।

(1) দেখছি, ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের লেখচিত্রটি রৈখিক লেখচিত্র। অর্থাৎ ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

(2) সোফিয়াবিবির যদি উৎপাদন খরচ 100 টাকা হয়, লেখচিত্র থেকে বিক্রয়মূল্য লিখি।

দেখছি, উৎপাদন খরচ 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য 125 টাকা।

অর্থাৎ, সেক্ষেত্রে সোফিয়াবিবির লাভ হবে 125 টাকা - 100 টাকা = 25 টাকা

বুঝেছি, লেখচিত্র থেকে আচার বিক্রি করে সোফিয়াবিবির লাভ শতকরা 25 বা 25%

(3) আবার লেখচিত্র থেকে দেখছি, বিক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ☐ টাকা [নিজে লিখি]

সেক্ষেত্রে, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ কত দেখি।

লেখচিত্র থেকে দেখছি বিক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে উৎপাদন খরচ 80 টাকা।

$\therefore$ লাভ = ☐ টাকা - 80 টাকা = 20 টাকা $\therefore$ বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ 20

(4) লেখচিত্র থেকে ক্রয়মূল্য 120 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ☐ টাকা [নিজে লিখি]
সেক্ষেত্রে সোফিয়াবিবির কত টাকা লাভ হবে হিসাব করি। [নিজে লিখি]

(5) লেখচিত্র থেকে বিক্রয়মূল্য 75 টাকা হলে সোফিয়াবিবির উৎপাদন খরচ কত টাকা হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

3 আমি ও আমার বন্ধু সায়ন ঠিক করেছি কয়েক দিস্তা কাগজ কিনে ছোটো ছোটো খাতা তৈরি করে বিক্রি করব। বিক্রি করে যে টাকা লাভ হবে, সেই টাকা কোনো দাতব্য হাসপাতালে দুঃস্থ মানুষদের ওষুধ কেনার জন্য দেব। তাই আমরা ঠিক করেছি 25% লাভে খাতা বিক্রি করব। লেখচিত্র তৈরি করে,আমাদের খাতা তৈরির ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের হিসাব করি।

আমরা 25% লাভে খাতা বিক্রয় করব। অর্থাৎ ,

খাতার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে (100 + ☐) টাকা = ☐ টাকা।

আমি ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের ছক তৈরি করলাম—

খাতার ক্রয়মূল্য (টাকা)	0	100
খাতার বিক্রয়মূল্য (টাকা)	0	125

1. প্রথমে ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এঁকে দুই অক্ষ বরাবর একটি সুবিধাজনক স্কেল নিলাম।
2. x-অক্ষ বরাবর খাতার ক্রয়মূল্য এবং y-অক্ষ বরাবর খাতার ☐ নিলাম।
3. ছক কাগজে ☐ ও ☐ বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করে OD রশ্মি পেলাম।

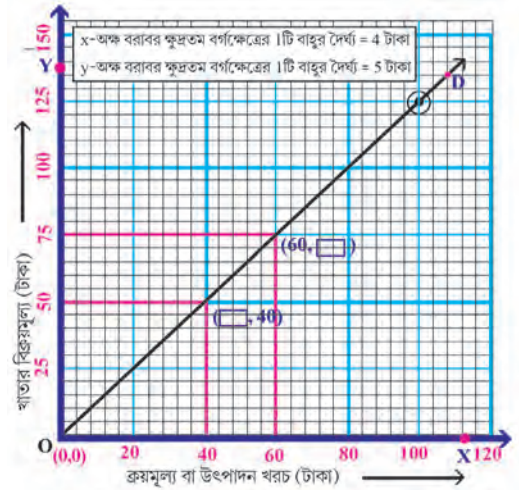
(i) লেখচিত্র থেকে দেখি, আমাদের খাতা তৈরি করার জন্য যদি খরচ 60টাকা হয়, তখন 25% লাভে বিক্রয় করার জন্য বিক্রয়মূল্য কত রাখতে হবে।

(ii) লেখচিত্র থেকে খাতা তৈরির খরচের সঙ্গে বিক্রয়মূল্যের সম্পর্ক লিখি।

(iii) লেখচিত্র থেকে 40 টাকা বিক্রয়মূল্য হলে, খাতা তৈরির জন্য কতটাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

(iv) লেখচিত্র থেকে 80 টাকা খাতা তৈরি করতে খরচ হলে, বিক্রয়মূল্য কত হবে লিখি। [লেখচিত্রে নিজে এঁকে লিখি]

(v) লেখচিত্র থেকে 90 টাকা বিক্রয়মূল্য হলে খাতা তৈরি করতে কত খরচ হবে লিখি।

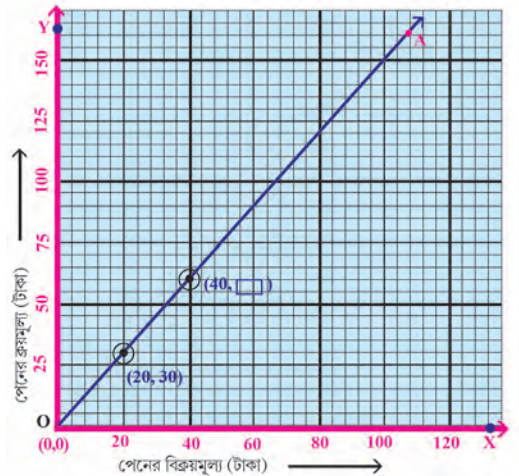
(vi) লেখচিত্র থেকে হিসাব করে দেখি, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত লাভ হবে।

4 **লেখচিত্র দেখি ও নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর খুঁজি**

(i) পেনের ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য কী সম্পর্কে আছে লিখি।

(ii) পেনের বিক্রয়মূল্য যখন 20 টাকা, তখন ক্রয়মূল্য কত টাকা হবে লিখি এবং এর ফলে লাভ না ক্ষতি হবে দেখি।

(iii) পেনের ক্রয়মূল্য 90 টাকা হলে, বিক্রয়মূল্য কত টাকা হবে লিখি।

(iv) যখন পেনের ক্রয়মূল্য 60 টাকা, তখন পেন বিক্রি করে কত ক্ষতি হবে লিখি।

(v) লেখচিত্র থেকে পেন বিক্রি করে ক্ষতির শতকরা হার লিখি।

5 কামাল 200 টাকায় একটি ঘড়ি কিনল। সে ওই ঘড়িটি বিক্রি করে 30% লাভ করতে চায়। হিসাব করে দেখি, কামাল কত টাকায় ওই ঘড়িটি বিক্রি করবে।

কামাল 30% লাভ করতে চায়। অর্থাৎ,

100 টাকা ক্রয়মূল্য (কেনা দাম) হলে বিক্রয়মূল্য হবে (100+30) টাকা = 130 টাকা

∴ 100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য হবে 130 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য হবে $\frac{130}{100}$ টাকা

200 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য হবে $\frac{130}{100} \times 200$ টাকা = 260 টাকা

∴ 30% লাভ রাখতে হলে কামালকে ওই ঘড়িটি 260 টাকায় বিক্রি করতে হবে।

অন্যপদ্ধতি

100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে লাভ হবে 30 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে লাভ হবে $\frac{30}{100}$ টাকা

200 টাকা ক্রয়মূল্য হলে লাভ হবে $\frac{30\times200}{100}$ টাকা

= 60 টাকা

বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + লাভ

= 200 টাকা + 60 টাকা = 260 টাকা

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি

বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ

= 200 টাকা + 200 × $\frac{30}{100}$ টাকা

= 260 টাকা

6 ঝরনা মাসি 22.80 টাকায় 1 ডজন কলা বিক্রি করায় 5% ক্ষতি হলো। 1 ডজন কলা ঝর্না মাসি কত টাকায় কিনেছিলেন হিসাব করে দেখি।

1ডজন কলার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে (100-5) টাকা = 95 টাকা।

[কারণ বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য - ক্ষতি]

কলার ☐ দেওয়া আছে। ক্রয়মূল্য বের করতে হবে।

কলার বিক্রয়মূল্য 95 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা।

কলার বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100}{95}$ টাকা।

কলার বিক্রয়মূল্য 22.80 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100\times22.80}{95}$ টাকা = $\frac{2280}{95}$ টাকা = 24 টাকা

∴ ঝরনা মাসি 1 ডজন কলা কিনেছিলেন 24 টাকায়।

7 শ্রাবণী 1টি শাড়ি বিক্রি করল ও দেখল ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের অনুপাত 25:24 হয়েছে। তার শতকরা লাভ বা ক্ষতি সমানুপাত তৈরি করে হিসাব করি।

শাড়িটির ক্রয়মূল্য 25x টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে 24x টাকা, যেখানে ($x>0$)

এখানে, বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য (>/< লিখি)

সুতরাং, ক্ষতি হয় (☐ − ☐) টাকা = xটাকা

ক্রয়মূল্য ও ক্ষতি ☐ (সরল / ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

∴ সরল সমানুপাতটি হলো, 25x : 100 :: x : ? (নির্ণেয় ক্ষতি)

∴ নির্ণেয় ক্ষতি = 4%

∴ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো

ক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্ষতি (টাকা)
25x	x
100	?

শ্রাবণীর বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত ক্ষতি হলো হিসাব করি। [নিজে করি]

8 সুরজিতবাবু 660 টাকায় একটি শাল বিক্রি করলেন। শাল বিক্রি করে সুরজিতবাবুর যত টাকা লাভ হলো 640 টাকায় বিক্রি করলে তত টাকা ক্ষতি হতো। সুরজিতবাবু শালটি কত টাকায় কিনেছিলেন হিসাব করে লিখি।

ধরি, 660 টাকায় বিক্রি করে সুরজিতবাবুর x টাকা লাভ হলো।

$\therefore$ ওই শালটির ক্রয়মূল্য = (660 – x) টাকা

আবার, 640 টাকায় বিক্রি করলে x টাকা ক্ষতি হতো

$\therefore$ শালের ক্রয়মূল্য পাই (640 + x) টাকা।

শর্তানুসারে, $660 - x = 640 + x$

বা, $-x - x = 640 - 660$

বা, $-2x = -20$

$\therefore \quad x = 10 \qquad \therefore$ সুরজিতবাবু শালটি (660–10) টাকা = 650 টাকায় কিনেছিলেন।

9 রফিকুলচাচা 178 টাকায় একটি ছাতা বিক্রি করায় 11% ক্ষতি হলো। ছাতাটি কত টাকায় বিক্রি করলে রফিকুলচাচার 11% লাভ হতো তা সমানুপাত তৈরি করে হিসাব করে লিখি।

প্রথমে রফিকুলচাচা কত টাকায় ছাতাটি কিনেছিলেন, অর্থাৎ ছাতাটির ক্রয়মূল্য হিসাব করি।

11% ক্ষতি হয়েছে। অর্থাৎ ,

ছাতাটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 – 11) টাকা = 89 টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

বিক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্রয়মূল্য (টাকা)
89	**100**
178	**?**

বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্য ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

$\therefore$ সরল সমানুপাতটি হলো, 89 : 178 :: 100 : ? (নির্ণেয় ক্রয়মূল্য)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য = $\frac{100\times178}{89}$ টাকা =200 টাকা

রফিকুলচাচা 11% লাভ করতে চান।

$\therefore$গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

ক্রয়মূল্য (টাকা)	বিক্রয়মূল্য (টাকা)
100	**100+11=111**
200	**?**

ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

$\therefore$ সরল সমানুপাতটি হলো,

100 : 200 :: 111 : ? (নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য)

$\therefore$ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = $\frac{200\times111}{100}$ টাকা = 222 টাকা

$\therefore$ 11% লাভ পেতে হলে রফিকুলচাচাকে ছাতাটি 222 টাকায় বিক্রি করতে হবে।

10 সিতারা বেগম একটি ব্যাগ বিক্রি করে 10% ক্ষতি করলেন। যদি ওই ব্যাগের ক্রয়মূল্য আরও 10 টাকা কম এবং বিক্রয়মূল্য 26 টাকা বেশি হতো তবে সিতারা বেগমের 15% লাভ হতো। হিসাব করে দেখি, সিতারা বেগম কত টাকায় ব্যাগটি কিনেছেন।

ধরি, সিতারা বেগম ব্যাগটি x টাকায় কিনেছিলেন।

10% ক্ষতিতে বিক্রি করেন। অর্থাৎ,

100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য (100-10) টাকা = 90 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{90}{100}$ টাকা

x টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{90 \times x}{100}$ টাকা $= \frac{9x}{10}$ টাকা

ক্রয়মূল্য যদি 10 টাকা কম হতো, তখন ক্রয়মূল্য = (x - 10) টাকা

বিক্রয়মূল্য যদি 26 টাকা বেশি হতো, তখন বিক্রয়মূল্য = $(\frac{9x}{10} + 26)$ টাকা .... (I)

তখন 15% লাভ হতো। অর্থাৎ ক্রয়মূল্য (x -10) টাকার উপর 15% লাভ হতো।

∴ তখন বিক্রয়মূল্য = $[(x-10) + (x-10) \times \frac{15}{100}]$ টাকা

$= [(x-10) + \frac{3}{20}(x-10)]$ টাকা = ☐ টাকা [নিজে করি] .... (II)

(I) ও (II) থেকে পাই, $\frac{9x}{10} + 26 = \frac{23x-230}{20}$

বা, $\frac{9x+260}{10} = \frac{23x-230}{20}$

বা, $2(9x+260) = 23x-230$

বা, $18x + 520 = 23x - 230$

বা, $18x - 23x = -520 - 230$ বা, $-5x = -750$

∴ $x = 150$ ∴ সিতারা বেগম ব্যাগটি 150 টাকায় কিনেছিলেন।

অন্য পদ্ধতি

ধরি, ক্রয়মূল্য 100x টাকা।

∴ বিক্রয়মূল্য (100x - 10x) টাকা = 90x টাকা।

ক্রয়মূল্য 10 টাকা কম হলে ক্রয়মূল্য হয় (100x - 10) টাকা।

বিক্রয়মূল্য 26 টাকা বেশি হলে বিক্রয়মূল্য হয় (90x + 26) টাকা।

এখন লাভ হয় 15% অর্থাৎ বর্তমান ক্রয়মূল্যের উপর লাভ 15%

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 + 15) টাকা

ক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{115}{100}$ টাকা

ক্রয়মূল্য (100x - 10) টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100x-10) \times \frac{115}{100}$ টাকা

আবার, বর্তমান বিক্রয়মূল্য (90x + 26) টাকা

শর্তানুসারে, $(100x-10) \times \frac{115}{100} = 90x + 26$

বা, $2300x - 230 = 1800x + 520$

বা, $2300x - 1800x = 520 + 230$

বা, $500x = 750$

বা, $x = \frac{750}{500}$ বা, $100x = \frac{750}{500} \times 100$

∴ $100x = 150$

সুতরাং সিতারা বেগম ব্যাগটি 150 টাকায় কিনেছিলেন।

11 রণেনবাবু 12 টি লজেন্স 5 টাকায় বিক্রি করায় 4% ক্ষতি হলো। তিনি কতগুলি লজেন্স 10 টাকায় বিক্রি করলে 28% লাভ হতো তা হিসাব করে দেখি।

বিক্রয়মূল্য (100 – 4) টাকা = 96 টাকা হলে ক্রয়মূল্য হয় 100 টাকা

বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য হয় $\frac{100}{96}$ টাকা

বিক্রয়মূল্য 5 টাকা হলে ক্রয়মূল্য হয় $\frac{100}{96} \times 5$ টাকা = $\frac{125}{24}$ টাকা।

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 + 28) টাকা = 128 টাকা

ক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{128}{100}$ টাকা

ক্রয়মূল্য $\frac{125}{24}$ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{128}{100} \times \frac{125}{24}$ টাকা = $\frac{20}{3}$ টাকা

$\frac{20}{3}$ টাকায় বিক্রি করেন 12 টি লজেন্স।

1 টাকায় বিক্রি করেন $\frac{12 \times 3}{20}$ টি লজেন্স।

10 টাকায় বিক্রি করেন $\frac{12 \times 3 \times 10}{20}$ টি = 18 টি লজেন্স

সুতরাং রণেনবাবু 10 টাকায় 18 টি লজেন্স বিক্রি করলে 28% লাভ হতো।

12 জয়ন্তবাবু একটি টেলিভিশন 10% লাভে বিক্রি করেন। যদি ক্রয়মূল্য 10% কম এবং বিক্রয়মূল্য 180 টাকা কম হতো, তাহলে জয়ন্তবাবুর 20% লাভ হতো। টেলিভিশনটির ক্রয়মূল্য কত তা হিসাব করি।

ধরি, টেলিভিশনটির ক্রয়মূল্য 100x টাকা।

সুতরাং, বিক্রয়মূল্য $100x \times \frac{110}{100}$ টাকা = 110x টাকা

ক্রয়মূল্য 10% কম হলে ক্রয়মূল্য হয় 90x টাকা।

বিক্রয়মূল্য 180 টাকা কম হলে বিক্রয়মূল্য হয় (110x – 180) টাকা

কিন্তু বর্তমান ক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ হয়।

সুতরাং, বর্তমান বিক্রয়মূল্য $90x \times \frac{120}{100}$ টাকা = 108x টাকা।
10

শর্তানুসারে, $110x - 180 = 108x$

বা, $110x - 108x = 180$

বা, $2x = 180$

বা, $x = \frac{180}{2}$

$\therefore x = 90$

সুতরাং, $100x = 9000$

∴ টেলিভিশনটির ক্রয়মূল্য 9000 টাকা।

13 সুদীপকাকু 32 টাকা প্রতি কিগ্রা. দামের পেঁয়াজের সঙ্গে 25 টাকা প্রতি কিগ্রা. দামের পেঁয়াজ মিশিয়ে প্রতি কিগ্রা. মিশ্রিত পেঁয়াজ 32.40 টাকায় বিক্রি করে 20% লাভ করেন। তিনি কী অনুপাতে দু-ধরনের পেঁয়াজ মিশিয়ে ছিলেন হিসাব করি।

ধরি, সুদীপকাকু x কিগ্রা. প্রথম প্রকারের পেঁয়াজের সঙ্গে y কিগ্রা. দ্বিতীয় প্রকারের পেঁয়াজ মিশিয়ে ছিলেন।
x কিগ্রা. প্রথম প্রকারের পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য $32x$ টাকা।
y কিগ্রা. দ্বিতীয় প্রকারের পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য $25y$ টাকা।
$(x+y)$ কিগ্রা. মিশ্রিত পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য $(32x+25y)$ টাকা।

প্রতি কিগ্রা. পেঁয়াজের বিক্রয়মূল্য 120 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা
প্রতি কিগ্রা. পেঁয়াজের বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100}{120}$ টাকা
প্রতি কিগ্রা. পেঁয়াজের বিক্রয়মূল্য 32.40 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100 \times 32.40}{120}$ টাকা $= \frac{3240}{120}$ টাকা $=27$ টাকা
$\therefore (x+y)$ কিগ্রা. মিশ্রিত পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য $27(x+y)$ টাকা।

শর্তানুসারে, $32x+25y=27(x+y)$
বা, $32x+25y=27x+27y$
বা, $32x-27x=27y-25y$
বা, $5x=2y$
বা, $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$
$\therefore\ x:y=2:5$

সুতরাং, সুদীপকাকু প্রথম ধরনের পেঁয়াজের সঙ্গে দ্বিতীয় ধরনের পেঁয়াজ 2 : 5 অনুপাতে মিশিয়ে ছিলেন।

14 রমেনকাকু তাঁর দোকানে একটি টেবিল ও একটি চেয়ার 3000 টাকায় কিনে আনেন। তিনি টেবিলটি 15% লাভে এবং চেয়ারটি 10% ক্ষতিতে বিক্রি করে মোট ক্রয়মূল্যের ওপর $8\frac{1}{3}$% লাভ করেন। টেবিল ও চেয়ারটি রমেনকাকু কত দামে কিনেছিলেন হিসাব করি।

ধরি, রমেনকাকু টেবিলটি x টাকায় ও চেয়ারটি y টাকায় কিনেছিলেন।

শর্তানুসারে, $x+y=3000$ .... (I)

$$\frac{15x}{100}-\frac{10y}{100}=3000\times\frac{25}{300}$$

বা, $\frac{15x}{100}-\frac{10y}{100}=250$ .... (II)

(II) নং সমীকরণ থেকে পাই, $15x-10y=25000$
(I) নং সমীকরণকে 10 দিয়ে গুণ করি, $10x+10y=30000$
$15x-10y=25000$
যোগ করে পাই, $25x=55000$
বা, $x=\frac{55000}{25}=2200$
আবার, (I) নং থেকে পাই, $y=3000-2200=800$

সুতরাং রমেনকাকু টেবিলটি 2200 টাকায় এবং চেয়ারটি 800 টাকায় কিনেছিলেন।

স্কুল থেকে বাড়ি ফিরে আমি আমার মায়ের সঙ্গে মিতা কাকিমার বইয়ের দোকানে গেলাম। একটি গল্পের বই আমার পছন্দ হলো। বইটির দাম লেখা আছে 50 টাকা। কিন্তু মিতা কাকিমা 45 টাকায় আমাকে বইটি বিক্রি করলেন।

মিতা কাকিমা বইটি (50 টাকা – 45 টাকা) = □ টাকা কমে বিক্রি করলেন।

মিতা কাকিমার 5 টাকা ক্ষতি হলো। কিন্তু কিছু লাভ না রাখলে মিতা কাকিমা দোকানের অন্যান্য খরচ কীভাবে চালাবেন?

মিতা কাকিমা 42 টাকায় বইটি কিনেছিলেন।

∴ বইটির বিক্রয়মূল্য □ ক্রয়মূল্য (>/< বসাই)

∴ ওই বইটি বিক্রি করে মিতা কাকিমা (45 টাকা – 42 টাকা) = □ টাকা □ (লাভ/ক্ষতি) করলেন।

বুঝেছি, বইটির ক্রয়মূল্য 42 টাকা

বইটির বিক্রয়মূল্য □ টাকা

তাহলে বইয়ের উপর লেখা মূল্যটিকে কী বলব?

বইয়ের উপরে লেখা মূল্যটি হলো ধার্যমূল্য।

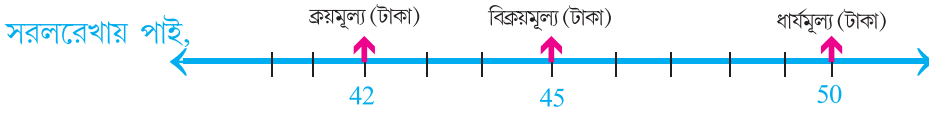
এই (50 টাকা – 45 টাকা) = 5 টাকা কমানোকে কী বলে?

একে ছাড় বা ডিসকাউন্ট বলা হয়।

বুঝেছি, তাহলে বইটির ধার্যমূল্য 50 টাকা।

মিতা কাকিমা 50 টাকা ধার্যমূল্যের বই 45 টাকায় বিক্রয় করলেন।

বুঝেছি, 50 টাকা ধার্যমূল্যের বই 5 টাকা ছাড় দিয়ে 45 টাকায় বিক্রি করেছেন।

সরলরেখায় পাই,

15 আমার বন্ধু অয়ন ওই দোকান থেকে একটি বই কিনল যার ধার্যমূল্য 140 টাকা। মিতা কাকিমা অয়নকে ধার্যমূল্যের উপর 10% ছাড় দিয়ে বইটি বিক্রি করলেন। '140 টাকার উপর 10% ছাড়' — মানে কত টাকা ছাড় দিলেন হিসাব করি।

10% ছাড় মানে 100 টাকা ধার্যমূল্য হলে 10 টাকা ছাড়

1 টাকা ধার্যমূল্য হলে $\frac{\square}{\square}$ টাকা ছাড়

140 টাকা ধার্যমূল্য হলে $\frac{10}{100}$ × 140 টাকা = 14 টাকা ছাড়

∴ 140 টাকায় 14 টাকা ছাড় পেয়ে (140 টাকা – 14 টাকা) = □ টাকায় অয়ন বইটি কিনল।

16 মিতা কাকিমা 120 টাকায় বইটি কিনেছেন। হিসাব করে দেখি ওই বইটি অয়নকে বিক্রি করে শতকরা কত লাভ করলেন।

বইটির ক্রয়মূল্য = 120 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য = 126 টাকা

∴ লাভ = 126 টাকা – 120 টাকা = 6 টাকা

∴ শতকরা লাভ = $\frac{6}{120}$ × 100 টাকা = 5 টাকা

∴ ওই বইটি ধার্যমূল্যের উপর 10% ছাড় দিয়ে বিক্রি করেও মিতা কাকিমার 5% লাভ থাকল।

17 এক পুস্তক প্রকাশক উৎপাদন ব্যয়ের উপর 30% দাম বাড়িয়ে একটি বইয়ের দাম ছাপেন 286 টাকা। কিন্তু বিক্রি করার সময় লিখিত দামের উপর 10% ছাড় দেন। পুস্তক প্রকাশকের শতকরা লাভ হিসাব করি।

ধরি, বইটির উৎপাদন ব্যয় 100 টাকা।

সুতরাং, বইটির উপর লিখিত মূল্য (100 + 30) টাকা = 130 টাকা।

বইটির লিখিত মূল্য 130 টাকা হলে উৎপাদন ব্যয় 100 টাকা

বইটির লিখিত মূল্য 1 টাকা হলে উৎপাদন ব্যয় $\frac{100}{130}$ টাকা

বইটির লিখিত মূল্য 286 টাকা হলে উৎপাদন ব্যয় $\frac{100 \times 286}{130}$ টাকা = 220 টাকা

∴ বইটির উৎপাদন ব্যয় 220 টাকা।

কিন্তু প্রকাশক বিক্রি করার সময় লিখিত মূল্যের উপর 10% ছাড় দেন।

সুতরাং প্রকাশক বইটি বিক্রি করেন $(286 - \frac{286 \times 10}{100})$ টাকায়

= (286 – 28.60) টাকায় = 257.40 টাকায়।

∴ প্রকাশকের লাভ 257.40 টাকা — 220 টাকা = 37.40 টাকা।

প্রকাশক 220 টাকায় লাভ করেন 37.40 টাকা

প্রকাশক 1 টাকায় লাভ করেন $\frac{37.40}{220}$ টাকা

প্রকাশক 100 টাকায় লাভ করেন $\frac{37.40 \times 100}{220}$ টাকা = $\frac{3740}{220}$ টাকা = 17 টাকা

∴ প্রকাশকের শতকরা লাভ 17

18 **ছক পূরণ করি :** [নিজে করি]

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ধার্যমূল্য	ধার্যমূল্যের উপর ছাড়	শতকরা লাভ/ক্ষতি
140 টাকা		160 টাকা	10%	
260 টাকা	285 টাকা		5%	
350 টাকা		400 টাকা	15%	
420 টাকা	480 টাকা	500 টাকা		
600 টাকা		700 টাকা		5 লাভ

19 আমার বন্ধু মাসুদদের একটি জুতো ও ব্যাগের দোকান আছে। তারা চামড়ার জুতো ও ব্যাগ তৈরি করে এবং বিক্রি করে। আমি মাসুদদের দোকান থেকে একটি জুতো কিনব। জুতোটির দাম 240 টাকা। মাসুদের দাদা 5% ছাড়ে আমাকে জুতোটির বিক্রয়মূল্য বলল। কিন্তু কাকাবাবু (মাসুদের বাবা) কিছু পরে এসে ওই বিক্রয়মূল্যের উপর আরো 5% ছাড় দিয়ে জুতোটি বিক্রি করলেন। হিসাব করে দেখি আমি জুতোটি কিনতে মোট কত টাকা ছাড় পেলাম।

মাসুদের দাদা 5% ছাড় দিলে ছাড় পাই

= 240 × $\frac{5}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য হলো 240 টাকা – 12 টাকা = 228 টাকা

কাকাবাবু বিক্রয়মূল্যের উপর 5% ছাড় দিলেন।

ছাড় দিলেন = 228 × $\frac{5}{100}$ টাকা = 11.40 টাকা

∴ মোট ছাড় পেলাম 12 টাকা + 11.40 টাকা = 23.40 টাকা

বুঝেছি, 240 টাকার উপর পরপর দুবার 5% ছাড় দিলে জুতোটির দাম 23.40 টাকা কম হয়।

19.1 কিন্তু আমি জুতো কিনতে শতকরা কত ছাড় পেলাম হিসাব করে দেখি।

240 টাকায় ছাড় পেলাম 23.40 টাকা

1 টাকায় ছাড় পেলাম $\frac{23.40}{240}$ টাকা

100 টাকায় ছাড় পেলাম $\frac{23.40 \times 100}{240}$ টাকা = $9\frac{3}{4}$ টাকা

$\therefore$ আমি $9\frac{3}{4}$ % ছাড়ে জুতোটি কিনলাম।

দেখছি, 240 টাকার উপর পরপর দুবার 5% ছাড় দিয়ে যত টাকার ছাড় পাব, 240 টাকার উপর $9\frac{3}{4}$ % ছাড় দিয়ে একই পরিমাণ ছাড় পাব।

19.2 240 টাকায়, 'পরপর দুবার 5% ছাড়' ও '$9\frac{3}{4}$% ছাড়'-এর মধ্যে কি সম্পর্ক আছে?

একে সমতুল্য ছাড় বলা হয়।

অর্থাৎ 240 টাকায় পরপর দুবার 5% ছাড়ের সমতুল্য ছাড় (Equivalent discount) $9\frac{3}{4}$%

কোনো নির্দিষ্ট মূলধনের সমতুল্য ছাড় হলো ওই মূলধনের উপর পরপর একাধিক ছাড়ের সমান।

20 আমি 20%, 10% এবং 5% পরপর ছাড়ের সমতুল্য ছাড় হিসাব করে লিখি।

100-য় 20% ছাড়ের পর বাকি থাকে 100 – 20 = 80

এবার 80-এর 10% $= 80 \times \frac{10}{100} = 8$

$\therefore$ বাকি থাকে = 80 – 8 = 72

72-র 5% $= 72 \times \frac{5}{100} = \frac{18}{5} = 3.6$

$\therefore$ মোট ছাড় = 20 + 8 + 3.6 = 31.6

$\therefore$ 20%, 10% এবং 5% পরপর ছাড়ের সমতুল্য ছাড় 31.6 %

21 সায়ন্তন একটি হারমোনিয়াম বিক্রি করবে যার ধার্যমূল্য 4000 টাকা। যদি সে ধার্যমূল্যের উপর পরপর যথাক্রমে 20%, 10% এবং 10% ছাড় দেয়, তবে হারমোনিয়ামের বিক্রয়মূল্য কত হবে হিসাব করে লিখি এবং সেক্ষেত্রে সমতুল্য ছাড় হিসাব করি। [নিজে করি]

কষে দেখি— 10.1

1. নীচের ছক পূরণ করি:

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি
500 টাকা			25 লাভ
300 টাকা			7 ক্ষতি
1250 টাকা			8 ক্ষতি
	23000 টাকা		15 লাভ

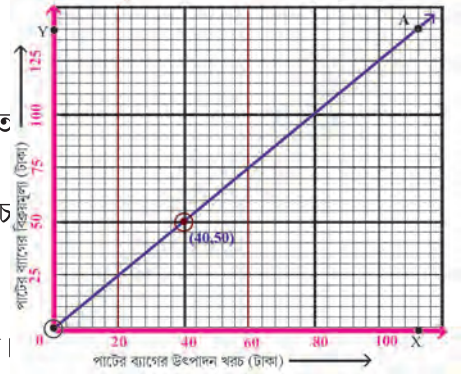
2. লেখচিত্রটি থেকে নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি :

(a) লেখচিত্র দেখে ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের সম্পর্ক লিখি।

(b) যে পাটের ব্যাগের উৎপাদন খরচ 60 টাকা তার বিক্রয়মূল্য কত হবে লিখি।

(c) যে পাটের ব্যাগের বিক্রয়মূল্য 125 টাকা তার উৎপাদন খরচ কী হবে লেখচিত্র দেখে লিখি।

(d) লেখচিত্র থেকে শতকরা লাভ বা ক্ষতি হিসাব করে লিখি।

(e) লেখচিত্র থেকে বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ বা ক্ষতি লিখি।

3. সুবীরকাকা 176 টাকা মূল্যে একটি ঘড়ি বিক্রি করেছেন। যদি ঘড়ি বিক্রি করে সুবীরকাকার 12% ক্ষতি হয়, তাহলে হিসাব করে দেখি তিনি কত টাকায় ঘড়িটি কিনেছিলেন।

4. আনোয়ারাবিবি 10টি লেবু 30 টাকায় কিনে প্রতি ডজন 42 টাকায় বিক্রি করলেন। হিসাব করে দেখি, আনোয়ারাবিবির শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো।
[সংকেত : 1টি লেবুর ক্রয়মূল্য = ☐ টাকা, 1টি লেবুর বিক্রয়মূল্য = $\frac{42}{12}$ টাকা = ☐ টাকা ☐ পয়সা]

5. অমলবাবু একটি ছবি 20% ক্ষতিতে বিক্রয় করলেন। কিন্তু আরও 200 টাকা বেশি মূল্যে বিক্রয় করলে 5% লাভ করতেন। তিনি ছবিটি কত মূল্যে কিনেছিলেন হিসাব করে লিখি।

6. সুপ্রিয়া একটি ঘড়ি কিনেছে। যদি সে ঘড়িটি 370 টাকায় বিক্রি করে তখন তার যত টাকা লাভ হবে, 210 টাকায় বিক্রি করলে তত টাকা ক্ষতি হবে। হিসাব করে ঘড়িটির ক্রয়মূল্য লিখি।

7. আমার দিদি অরুণমামার দোকান থেকে 255 টাকায় একটি ছাতা কিনল। অরুণমামা যদি ছাতার ধার্যমূল্যের উপর 15% ছাড় দিয়ে থাকেন, তবে ওই ছাতার ধার্যমূল্য কত ছিল হিসাব করে লিখি।

8. আমার বন্ধু একটি গল্পের বই লিখিত মূল্যের উপর 25% ছাড়ে কিনল। সে যদি ওই বইটি লিখিত মূল্যেই বিক্রি করে, তবে সে শতকরা কত লাভ করবে হিসাব করে লিখি।

9. নিয়ামতচাচা প্রতিটি 5 টাকা দরে 150টি ডিম কিনেছেন। কিন্তু দোকানে এনে দেখলেন 8টি ডিম ফেটে গেছে এবং 7টি ডিম পচা। প্রতিটি ডিম 6 টাকা দরে বিক্রি করলে, নিয়ামতচাচার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে হিসাব করে লিখি।

10. আসিফচাচা একটি খেলনা 5% লাভে বিক্রি করলেন। যদি খেলনাটির ক্রয়মূল্য 20% কম এবং বিক্রয়মূল্য 34 টাকা কম হতো, তাহলে আসিফচাচার 10% লাভ হতো। খেলনাটির ক্রয়মূল্য কত হিসাব করি।

11. টাকায় 12টি জিনিস বিক্রি করে 4% ক্ষতি হয়। টাকায় কটি জিনিস বিক্রি করলে 44% লাভ হবে?

12. রমা পিসি দুটি শাড়ি তৈরি করে একটি 15% এবং অপরটি 20% লাভে বিক্রি করলেন। তাঁর মোট লাভ হলো 262.50 টাকা। শাড়ি দুটির উৎপাদন ব্যয় 1:3 হলে, শাড়ি দুটির প্রত্যেকটির উৎপাদন ব্যয় কত?

13. এক ব্যক্তি 2 টাকায় 15টি হিসাবে কিছু লজেন্স কিনলেন। তিনি অর্ধেক টাকায় 5টি দরে এবং বাকি অর্ধেক টাকায় 10টি দরে বিক্রি করলেন। তাঁর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো?

14. আফসারচাচা দুটি কাঠের চেয়ার একই দামে তৈরি করলেন এবং চেয়ার দুটির প্রত্যেকটির ধার্যমূল্য ঠিক করলেন 1250 টাকা। তিনি একটি চেয়ার 8% ছাড়ে বিক্রি করে 15% লাভ করলেন। যদি তিনি দ্বিতীয় চেয়ারটি 1120 টাকায় বিক্রি করেন, তাহলে তাঁর মোটের উপর শতকরা লাভ কত হলো হিসাব করি।

15. একটি বিশেষ ধরনের কলমের ধার্যমূল্য 36.50 টাকা। রফিকচাচা শুভমকে একটি পেনে 2.90 টাকা ছাড় দিয়ে বিক্রি করে, 12% লাভ করলেন। যদি তিনি ওই ধরনের আর একটি কলম মিতাকে 34.50 টাকায় বিক্রি করেন, তাহলে দ্বিতীয় কলমটিতে তাঁর শতকরা লাভ কত হলো নির্ণয় করি।

16. এক পুস্তক প্রকাশক 2000 কপি বই ছাপার জন্য 3,875 টাকার কাগজ কিনতে, 3,315 টাকা ছাপতে এবং 810 টাকা বাঁধানোর জন্য খরচ করেন। তিনি পুস্তক বিক্রেতাদের 20% ছাড় দিয়ে 20% লাভে বিক্রি করেন। প্রতিটি বইয়ের ধার্যমূল্য কত নির্ণয় করি?

17. হাসিমাবিবি দুটি হস্তশিল্পের প্রত্যেকটি 1248 টাকায় বিক্রি করেন। তিনি প্রথমটিতে 4% লাভ করেন, কিন্তু দ্বিতীয়টিতে তার 4% ক্ষতি হয়। তার মোট লাভ বা ক্ষতি কত হলো?

18. করিম, মোহনকে 4860 টাকায় একটি মোবাইল ফোন বিক্রি করায় 19% ক্ষতি হয়। মোহন, রহিমকে যে দামে বিক্রি করে সেই দামে করিম মোহনকে বিক্রি করলে করিমের 17% লাভ হয়। মোহনের শতকরা লাভ কত?

19. ফিরোজচাচা একটি প্যান্ট 20% লাভে এবং একটি জামা 15% লাভে বিক্রি করে মোট 719.50 টাকা পেলেন। তিনি যদি প্যান্টটি 25% এবং জামাটি 20% লাভে বিক্রি করতেন, তাহলে তিনি আরও 30.50 টাকা বেশি পেতেন। প্যান্ট ও জামার ক্রয়মূল্য নির্ণয় করি।

20. রবীনকাকু 3000 টাকার চাল কিনলেন। তিনি $\frac{1}{3}$ অংশ 20% ক্ষতিতে এবং $\frac{2}{5}$ অংশ 25% লাভে বিক্রি করলেন। শতকরা কত লাভে তিনি বাকি অংশ বিক্রি করলে তাঁর মোটের উপর 10% লাভ হবে?

21. এক ব্যবসায়ী এক ধরনের চা 80 টাকা প্রতি কিগ্রা দরে বিক্রি করে 20% ক্ষতি এবং অপর এক ধরনের চা 200 টাকা প্রতি কিগ্রা দরে বিক্রি করে 25% লাভ করেন। তিনি দু-ধরনের চা কি অনুপাতে মিশিয়ে প্রতি কিগ্রা 150 টাকা দরে বিক্রি করলে 25% লাভ হবে?

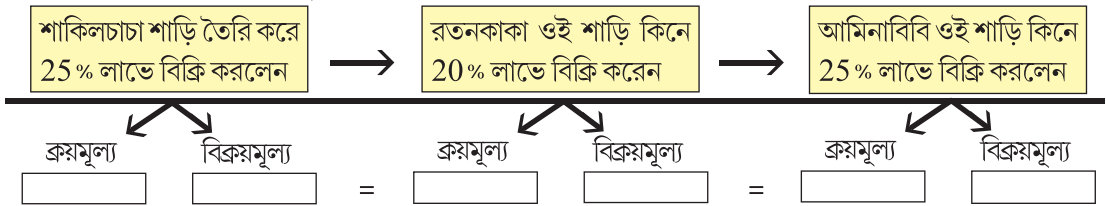
শাকিলচাচা শাড়ি তৈরি করছেন

শাকিলচাচা রতনকে শাড়ি বিক্রি করছেন

রতন আমিনাবিবিকে শাড়ি বিক্রি করছেন

আমিনাবিবি ফতিমাকে শাড়ি বিক্রি করছেন

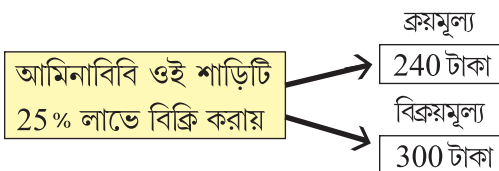
22 শান্তিপুরে শাকিলচাচার তাঁত আছে। তিনি প্রতিটি শাড়ি 25% লাভে পাইকারি ব্যবসায়ী রতনকাকাকে বিক্রি করেন। রতনকাকা আবার 20% লাভে খুচরো ব্যবসায়ী আমিনাবিবিকে বিক্রি করেন। আমিনাবিবি আবার 25% লাভে ফতিমাকে শাড়ি বিক্রি করেন। হিসাব করে দেখি, যে শাড়ি আমি আমিনাবিবির থেকে 300 টাকায় কিনেছি, যদি ওই শাড়ি শাকিলচাচার থেকে কিনতে পারতাম আমার কত টাকা সাশ্রয় হতো এবং শাকিলচাচার উৎপাদন ব্যয় কত ছিল হিসাব করি।

প্রথমে একটি সরলরেখাংশে ছবি এঁকে বোঝার চেষ্টা করি।

আমি প্রথমে আমিনাবিবি কত টাকায় ওই শাড়িটি রতনকাকার থেকে কিনেছিলেন হিসাব করি।

আমিনাবিবি শাড়িটি কিনে 25% লাভ করেছিলেন

∴ শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 125 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ছিল 100 টাকা

শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ছিল $\frac{100}{125}$ টাকা

শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 300 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ছিল $\frac{100 \times 300}{125}$ টাকা = 240 টাকা

আমিনাবিবি 240 টাকায় শাড়িটি রতনকাকার থেকে কিনেছিলেন।

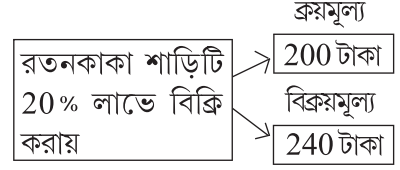
∴ আমিনা বিবির কাছে ওই শাড়িটির ক্রয়মূল্য = রতনকাকার কাছে ওই শাড়িটির বিক্রয়মূল্য।

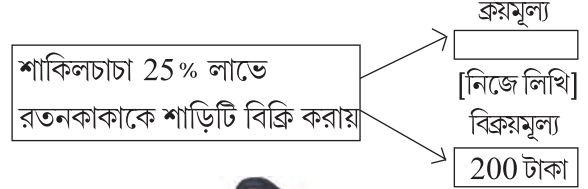
22.1 কিন্তু রতনকাকা শাড়িটি 20% লাভে আমিনাবিবিকে 240টাকায় বিক্রি করেছিলেন। হিসাব করে দেখি রতনকাকা কত টাকায় ওই শাড়িটি শাকিলচাচার থেকে কিনেছিলেন।

রতনকাকা শাড়িটি 20% লাভে বিক্রি করেন।

অর্থাৎ শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 120 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা

শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 240 টাকা হলে ক্রয়মূল্য = ☐ টাকা [নিজে লিখি]

রতনকাকা শাড়িটি 20% লাভে বিক্রি করায় → ক্রয়মূল্য 200 টাকা; বিক্রয়মূল্য 240 টাকা

এবার বুঝেছি রতনকাকা 200 টাকায় ওই শাড়িটি শাকিলচাচার থেকে কিনেছিলেন। অর্থাৎ শাকিলচাচা 200 টাকায় শাড়িটি বিক্রি করেছেন।

শাকিলচাচা 25% লাভে রতনকাকাকে শাড়িটি বিক্রি করায় → ক্রয়মূল্য ☐ [নিজে লিখি]; বিক্রয়মূল্য 200 টাকা

বুঝেছি, শাকিলচাচার ওই শাড়িটি তৈরি করতে 160 টাকা খরচ হয়েছে।

∴ শাকিলচাচার থেকে ওই শাড়িটি কিনলে আমার 300 টাকা – 200 টাকা = 100 টাকা সাশ্রয় হতো।

∴ পেলাম,

শাকিলচাচার 25% লাভে বিক্রি		রতনকাকার 20% লাভে বিক্রি		আমিনাবিবির 25% লাভে বিক্রি	
ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য
160 টাকা	200 টাকা	200 টাকা	240 টাকা	240 টাকা	300 টাকা

কিন্তু রতনকাকার কাছ থেকে কিনলে আমার কত টাকা সাশ্রয় হতো দেখি

রতনকাকার কাছ থেকে কিনলে আমার সাশ্রয় হতো = ☐ টাকা – ☐ টাকা = ☐ টাকা।

23 1 ডজন টেবিল ল্যাম্পের উৎপাদন খরচ ও বিভিন্ন পর্যায়ে ক্রয়মূল্য হলো,

উৎপাদন খরচ (টাকা)	পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)	খুচরা ব্যবসায়ীর ক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)
2700	3000	3300	3795

হিসাব করে দেখি, টেবিল ল্যাম্প বিক্রি করে খুচরা ব্যবসায়ী শতকরা কত লাভ করলেন।

খুচরা ব্যবসায়ীর 1 ডজন টেবিল ল্যাম্পের ক্রয়মূল্য 3300 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য 3795 টাকা

∴ তিনি লাভ করেন 3795 টাকা – 3300 টাকা = 495 টাকা

∴ খুচরা ব্যবসায়ীর শতকরা লাভ $\frac{495}{3300} \times 100 = 15$ ∴ খুচরা ব্যবসায়ী 15% লাভ করেন।

23.1 আমি হিসাব করে দেখি টেবিল ল্যাম্প বিক্রি করে পাইকারি বিক্রেতা শতকরা কত লাভ করলেন।

পাইকারি ব্যবসায়ীর 1 ডজন টেবিল ল্যাম্প ক্রয় করেন ☐ টাকায়।

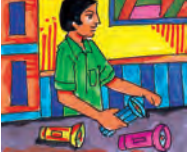
1 ডজন টেবিল ল্যাম্প বিক্রয় করেন ☐ টাকায়।

সুতরাং, তিনি লাভ করেন 3300 টাকা – 3000 টাকা = ☐ টাকা

∴ পাইকারি ব্যবসায়ীর শতকরা লাভ ☐ [নিজে করি]

একইভাবে আমি হিসাব করে দেখছি টেবিল ল্যাম্প বিক্রি করে উৎপাদকের লাভ হলো ☐% [নিজে করি]

23.2 কোনো ক্রেতা যদি সরাসরি উৎপাদকের কাছ থেকে কিনত তবে কত সাশ্রয় করত হিসাব করে লিখি।

উৎপাদকের কাছ থেকে সরাসরি কিনলে ক্রেতার সাশ্রয় হতো (3795 – 3000) টাকা = 795 টাকা

24 জোসেফের একটি টর্চ তৈরি করতে 560 টাকা খরচ হলো। জোসেফ ওই টর্চ দোকানদার রাণাকে 22% লাভে বিক্রি করল। রাণা যদি 854 টাকায় ওই টর্চটি বিক্রি করে তবে রাণার শতকরা কত লাভ হবে হিসাব করে লিখি।

প্রথমে জোসেফ রাণাকে 22% লাভে বিক্রি করলে বিক্রয়মূল্য কত হবে হিসাব করি।

100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য (100 + 22) টাকা=122 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{122}{100}$ টাকা

560 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{122 \times 560}{100}$ টাকা

$= \frac{6832}{10}$ টাকা = 683.20 টাকা

∴ রাণা 683.20 টাকায় ওই টর্চটি কেনে। কিন্তু রাণা 854 টাকায় ওই টর্চটি বিক্রি করে।

∴ রাণার লাভ হয় = 854 টা. – 683.20 টা.= 170.80 টাকা

∴ ওই টর্চ বিক্রি করে রাণার শতকরা লাভ হয় $= \frac{170.80 \times 100}{683.20} = \square$

কষে দেখি— 10.2

1. আঁটপুরের সুবলবাবু ধান উৎপাদন করে এক পাইকারি বিক্রেতা সাহানাবিবিকে 20% লাভে চাল বিক্রি করেন। সাহানাবিবি দোকানদার উৎপলবাবুকে 10% লাভে ওই চাল বিক্রি করেন। কিন্তু উৎপলবাবু যদি 12 % লাভে ওই চাল বিক্রি করে থাকেন তবে একটি সরলরেখাংশে ছবি এঁকে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর খুঁজি:

(i) সুবলবাবুর যে চাল উৎপাদন করতে 7500 টাকা খরচ হয়েছে, সেই চাল সাহানাবিবি কত টাকায় কিনেছেন হিসাব করে লিখি।

(ii) সুবলবাবুর যে চাল উৎপাদন করতে 2500 টাকা খরচ হয়েছে, সেই চাল উৎপলবাবু কত টাকায় বিক্রি করবেন হিসাব করে লিখি।

(iii) উৎপলবাবু আমাদের যে দামে চাল বিক্রি করেন সুবলবাবু যদি সেই দামে সরাসরি চাল বিক্রি করেন তবে সুবলবাবুর শতকরা কত লাভ হবে হিসাব করে লিখি।

2. কোন এক বাজারে পাটের ব্যাগ বিক্রয়ের সময়ে উৎপাদনকারী, পাইকারি বিক্রেতা ও খুচরো ব্যবসায়ী যথাক্রমে 15%, 20% ও 25% লাভ করেন। এখন যদি কোনো একটি ব্যাগ উৎপাদনকারী, পাইকারি বিক্রেতা ও খুচরো ব্যবসায়ীর মধ্য দিয়ে ক্রেতার কাছে পৌঁছায়, তবে নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি:

(i) যে ব্যাগ ক্রেতা 138 টাকা দিয়ে কিনেছে তার উৎপাদন খরচ হিসাব করে লিখি।

(ii) যে ব্যাগের খরচ 140 টাকা সেই ব্যাগ ক্রেতা কী দামে কিনবে হিসাব করে লিখি।

(iii) খুচরো ব্যবসায়ী যে ব্যাগ 98 টাকা দিয়ে কিনেছেন সেই ব্যাগ কিনতে ক্রেতাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

(iv) পাইকারি বিক্রেতা যে ব্যাগ 175 টাকায় কিনেছেন সেই ব্যাগ কিনতে ক্রেতাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করি।

(v) ক্রেতা যে ব্যাগ 276 টাকায় কিনেছে, সেই ব্যাগ সরাসরি পাইকারি বিক্রেতার থেকে কিনলে কত টাকা তার সাশ্রয় হতো হিসাব করে লিখি।

3. একটি সাইকেলের উৎপাদন খরচ ও বিভিন্ন পর্যায়ে ক্রয়মূল্য হলো,

উৎপাদন খরচ (টাকা)	পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)	খুচরো ব্যবসায়ীর ক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)
1050	1260	1449	1666.35

(i) হিসাব করে দেখি সাইকেল বিক্রি করে খুচরো ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ হলো।
(ii) হিসাব করে দেখি সাইকেল বিক্রি করে পাইকারি বিক্রেতার শতকরা কত লাভ হলো।
(iii) সাইকেল বিক্রি করে উৎপাদনকারীর শতকরা কত লাভ হলো হিসাব করে লিখি।
(iv) একটি সাইকেল কিনতে ক্রেতাকে সাইকেলটির উৎপাদন খরচের শতকরা কত বেশি দিতে হবে হিসাব করে লিখি।
(v) যদি কোনো ক্রেতা উৎপাদনকারীর কাছ থেকে সরাসরি সাইকেল কেনেন যেখানে উৎপাদনকারীর 30% লাভ থাকে, তাহলে ওই ক্রেতার কত টাকা সাশ্রয় হবে হিসাব করে লিখি।

4. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের অনুপাত 10:11 হলে, শতকরা লাভ
(a) 9 (b) 11 (c) $10\frac{1}{9}$ (d) 10

(ii) একটি বই 40 টাকায় কিনে 60 টাকায় বিক্রি করলে শতকরা লাভ
(a) 50 (b) $33\frac{1}{3}$ (c) 20 (d) 30

(iii) একটি জামা 360 টাকায় বিক্রি করায় 10% ক্ষতি হলো। জামাটির ক্রয়মূল্য
(a) 380 টাকা (b) 400 টাকা (c) 420 টাকা (d) 450 টাকা

(iv) 20% ছাড় দিয়ে বিক্রি করায় একটি জ্যামিতি বাক্সের বিক্রয়মূল্য হয় 48 টাকা। জ্যামিতি বাক্সের ধার্যমূল্য
(a) 60 টাকা (b) 75 টাকা (c) 80 টাকা (d) 50 টাকা

(v) এক খুচরো বিক্রেতা ধার্যমূল্যের উপর 20% ছাড়ে ওষুধ কিনে ক্রেতাকে ধার্যমূল্যে ওষুধ বিক্রি করেন। খুচরো বিক্রেতার শতকরা লাভ
(a) 20 (b) 25 (c) 10 (d) 30

5. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন:

(i) ক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ হলে, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ কত?
(ii) বিক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ হলে, ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ কত?
(iii) 110 টি আম বিক্রি করে 120 টি আমের ক্রয়মূল্য পেলে শতকরা লাভ কত?
(iv) সময়মতো ইলেকট্রিক বিল জমা দিলে 15% ছাড় পাওয়া যায়। সুমনবাবু সময় মতো ইলেকট্রিক বিল জমা দিয়ে 54 টাকা ছাড় পেলেন। তাঁর ইলেকট্রিক বিল কত ছিল?
(v) বিক্রয়মূল্যের উপর 20% ক্ষতিতে একটি দ্রব্য 480 টাকায় বিক্রি করা হলে দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?
(vi) একটি দ্রব্য পরপর 20% ও 10% ছাড়ে বিক্রয় করা হলে সমতুল্য ছাড় কত?

11 রাশিবিজ্ঞান
STATISTICS

প্রতি বছরের মতো এবছরেও আমাদের গ্রামবাসীদের আর্থিক অবস্থা জানার জন্য আমাদের পাড়ার গ্রাম উন্নয়ন সমিতির কিছু সদস্য গ্রামবাসীদের নানান তথ্য জোগাড় করবেন।

এখন আমাদের স্কুলে গ্রীষ্মের ছুটি চলছে। তাই আমি ও আমার কিছু বন্ধু ঠিক করেছি এবছরে এই কাজে সমিতির দাদা ও দিদিদের সাহায্য করব।

সেইজন্য আমরা গ্রামের 50টি পরিবারের খাদ্যের দৈনিক খরচের একটি **কাঁচা তথ্য (Raw data)** সংগ্রহ করেছি।

গ্রামের 50টি পরিবারের খাদ্যের জন্য দৈনিক খরচ (টাকায়)

145,	150,	200,	175,	75,	90,	250,	125,	190,	175,
110,	175,	90,	150,	145,	125,	190,	200	225,	110,
75,	225,	200,	125,	190,	110,	145,	175,	125,	150,
190,	110,	150,	175,	145,	125,	75,	275,	150,	225,
125,	150,	225,	110,	90,	145,	190,	125,	110,	75

1 **আমি ট্যালিমার্ক দিয়ে এই কাঁচা তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।**

ছক 1

দৈনিক খরচ (x) টাকা	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা (f)
75	IIII	4
90	III	3
110	𝍸 I	6
125	𝍸 II	7
145	𝍸	5
150	𝍸 I	6
175	𝍸	5
190	𝍸	5
200	III	3
225	IIII	4
250	I	1
275	I	1
মোট		50

পরিবর্তনশীল সংখ্যাগত লক্ষণকে চল (Variable) বলে। যেমন পরিবারের দৈনিক খরচ একটি চল। যেহেতু পরিবারের দৈনিক খরচ পরিবর্তনশীল এবং দৈনিক খরচ পরিমাপ করা যায় তাই দৈনিক খরচ চল।

চল বিচ্ছিন্ন (Discrete) ও অবিচ্ছিন্ন (Continuous) এই দুইপ্রকার হতে পারে। যেমন দেশে নদীর সংখ্যা, পরিবারের সদস্য সংখ্যা ইত্যাদি বিচ্ছিন্ন চল। আবার ছাত্রের ওজন, উচ্চতা ইত্যাদি অবিচ্ছিন্ন চল।

যা পরিমাপ করা যায় না এমন পরিবর্তনশীল গুণকে কী বলব?

রাশিবিজ্ঞানে (Statistics) পরিবর্তনশীল লক্ষণকে গুণ-লক্ষণ বা গুণ (Attribute) বলে।
যেমন, কোনো বাড়িতে যতগুলি ইলেট্রিক সুইচ থাকে তার দুটি অবস্থা— জ্বালানো (on) ও নিভানো (off)।
কোনো বাড়ির সদস্যদের মহিলা ও পুরুষ এই দুটি ভাগে ভাগ করা যায়।

2 আগের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে পাই চলের সর্বোচ্চ মান 275 ও সর্বনিম্ন মান 75; আমি এই চলের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য হিসাব করি। এই পার্থক্যকে কী বলা হয় লিখি।
কোনো প্রদত্ত রাশিতথ্যের চলের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের অন্তর হলো প্রসার (Range)।
এখানে, প্রসার = 275 – 75 =200

আমি প্রাপ্ত তথ্যকে কতকগুলি শ্রেণিতে বিভক্ত করি।
যদি প্রাপ্ত তথ্যকে 6টি শ্রেণিতে ভাগ করি তবে প্রতিটি শ্রেণির দৈর্ঘ্য হবে $\frac{200}{6} \approx 35$

প্রাপ্ত তথ্যকে শ্রেণিতে ভাগ করে পেলাম: **ছক - 2**

দৈনিক খরচ টাকায় (x)	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা (f)
70 – 105	卌 II	7
105 – 140	卌 卌 III	13
140 – 175	卌 卌 I	11
175 – 210	卌 卌 III	13
210 – 245	IIII	4
245 – 280	II	2

∴ পেলাম, বিস্তৃত প্রসার আছে এইরকম চলের মানগুলিকে কতকগুলি শ্রেণি বা বিভাগে ভাগ করা যায়। এরকম প্রত্যেকটি শ্রেণিকে শ্রেণি অন্তর (Class interval) বলা হয়।
আবার কোনো শ্রেণির অন্তর্গত মানগুলির সংখ্যাকে শ্রেণিটির শ্রেণি-পরিসংখ্যা (Class frequency) বলা হয়।

কিন্তু শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা কতগুলি নেব?

শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা **পাঁচের কম এবং তিরিশের বেশি** হওয়া উচিত নয়। কারণ, শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা খুব কম হলে ভ্রমশূন্যতা নষ্ট হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। আবার শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা খুব বেশি হলে হিসাব পরিশ্রমসাধ্য হয়ে পড়ে।

শ্রেণী অন্তরে প্রান্তস্থ মানদুটিকে কী বলব?

শ্রেণি অন্তরের প্রান্তস্থ মানদ্বয়কে **শ্রেণি-সীমা** (class-limit) বলা হয়।

একটি নির্দিষ্ট শ্রেণির শ্রেণি-সীমাদ্বয়ের ক্ষুদ্রতর মানটিকে **নিম্নসীমা** (Lower class-limit) এবং বৃহত্তর মানটিকে **ঊর্ধ্বসীমা** (Upper class-limit) বলা হয়।

2 নং ছকে দ্বিতীয় শ্রেণিটির (অর্থাৎ 105 – 140 শ্রেণিটির) নিম্নসীমা 105 এবং ঊর্ধ্বসীমা 140

শ্রেণি-সীমা নির্ধারণের সময়ে অবিন্যাসিত চলের সর্বনিম্ন মান থেকেই যে শুরু করতে হবে এবং সর্বোচ্চ মানে গিয়ে শেষ করতে হবে এমন কোনো বাঁধাধরা নিয়ম নেই। সকল শ্রেণির প্রসার একই মানের রাখার জন্য প্রয়োজন বোধে চলের সর্বনিম্ন মান অপেক্ষা কম যে কোনো উপযোগী সংখ্যাকে প্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা ধরা যেতে পারে।

ছক 2 নং -এ দেখেছি , (140 – 175) ও (175 – 210)-শ্রেণি দুটির মধ্যে 175 এই নিম্নসীমাটিকে (175 – 210)- শ্রেণির মধ্যে নেওয়া হয়েছে কিন্তু (140 – 175)-শ্রেণিতে নেওয়া হয়নি কেন?

শ্রেণি-সীমা দুইভাবে প্রকাশ করা হয়।

(i) শ্রেণি-বহির্ভূত পদ্ধতি (Exclusive method)

(ii) শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতি (Inclusive method)

(i) শ্রেণি-বহির্ভূত পদ্ধতিতে প্রতিটি শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা ঠিক পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমা হিসাবে প্রকাশ করা হয় এবং শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা ওই শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত হয় না। সেটি ঠিক পরবর্তী শ্রেণিটিতে অন্তর্ভুক্ত হয়। যেমন, শ্রেণী-বহির্ভূত পদ্ধতিতে 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, 175 – 210, ইত্যাদি।

(ii) শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতিতে প্রতিটি শ্রেণির নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমা নির্দেশক সংখ্যাগুলি ওই শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত হয়। যেমন, 60 – 69, 70 – 79, 80 – 89, ইত্যাদি।

শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতিতে দুটি ক্রমিক (পরপর) শ্রেণির শ্রেণি-সীমার মধ্যবর্তী ফাঁক কীভাবে পূরণ করা হয়। অর্থাৎ, 60 – 69 এবং 70 – 79 শ্রেণিদুটির 69 ও 70-এর মধ্যবর্তী ফাঁক কীভাবে পূরণ করা হয়?

কোন রাশিতথ্যের ক্রমিক শ্রেণিগুলির শ্রেণি-সীমাগুলির মধ্যবর্তী ফাঁক পূরণ করার জন্য যে সীমাদ্বয় পর্যন্ত কোনো শ্রেণিকে প্রসারিত করা হয় সেই সীমাদ্বয়কে ওই শ্রেণির শ্রেণি-সীমানা (Class-boundaries) বা শ্রেণিসীমান্ত বলা হয়। ক্ষুদ্রতর মানটিকে নিম্ন শ্রেণি-সীমানা (Lower class boundary) এবং বৃহত্তর মানটিকে ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা (Upper class boundary) বলা হয়।

শ্রেণি-সীমা থেকে কীভাবে শ্রেণি-সীমানা পাবো দেখি।

ধরি, কোনো শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা ও তার ঠিক পরবর্তী শ্রেণিটির নিম্নসীমার অন্তর = d

∴ সেক্ষেত্রে, শ্রেণিটির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা = শ্রেণিটির নিম্নসীমা $-\frac{d}{2}$

এবং শ্রেণিটির ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা = শ্রেণিটির ঊর্ধ্বসীমা $+\frac{d}{2}$

বুঝেছি, 60 – 69, 70 –79, 80 – 89, ... শ্রেণিগুলি শ্রেণি-সীমানার সাহয্যে প্রকাশ করে পাই,

59.5 – 69.5, ☐ – ☐, ☐ – 89.5, ... [নিজে লিখি]

[যেহেতু, $\frac{70-69}{2} = 0.5$]

আবার, 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, ... শ্রেণিগুলির শ্রেণি-সীমানার সাহায্যে প্রকাশ করে পাই,

70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, ...

অর্থাৎ একই পেলাম। কারণ, এক্ষেত্রে $d = \frac{105 - 105}{2} = 0$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে শ্রেণি-সীমা ও শ্রেণি-সীমানা একই।

কোন শ্রেণিসীমানাদ্বয়ের মাঝখানের মানকে কী বলব?

চলের যে মান শ্রেণিসীমানাদ্বয়ের ঠিক মাঝখানে থাকে তাকে ওই শ্রেণির মধ্যমান বা শ্রেণি-মধ্যক (Mid - value or Class-mark) বলা হয়।

∴ কোনো শ্রেণির মধ্যমান = $\frac{\text{ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমা + নিম্ন শ্রেণি-সীমা}}{2}$

বা কোনো শ্রেণির মধ্যমান = $\frac{\text{ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা + নিম্ন শ্রেণি-সীমানা}}{2}$

আবার, কোনো শ্রেণির সীমানাদ্বয়ের অন্তর হলো ওই শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য।

∴ শ্রেণি-দৈর্ঘ্য = ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা – নিম্ন শ্রেণি-সীমানা।

বুঝেছি, 60 – 69 শ্রেণির মধ্য-মান = $\frac{60 + 69}{2}$ (বা, $\frac{59.5 + 69.5}{2}$) = 64.5

এবং 60 – 69 -এর শ্রেণি-দৈর্ঘ্য = 69.5 – 59.5 = 10

ছক 2 থেকে দেখছি, 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, 175 – 210, 210 – 245 ও 245 – 280-এর শ্রেণি পরিসংখ্যা যথাক্রমে ☐, ☐, ☐, ☐, ☐ ও ☐,

ছক 2 -এর মোট পরিসংখ্যা = 7 + 13 + ☐ + ☐ + 4 + ☐ = 50,

3 আমি ছক 2 নং -এর শ্রেণি পরিসংখ্যা ও শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের অনুপাত নিই ও কী পাই দেখি।

70 – 105 শ্রেণিটির শ্রেণি পরিসংখ্যা = ☐

70 – 105 শ্রেণিটির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য = 105 – 70 = 35

∴ (70 – 105) শ্রেণিটির, $\frac{\text{শ্রেণিপরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণি-দৈর্ঘ্য}} = \frac{7}{35} = 0.2$

কোন শ্রেণিবিন্যাসিত রাশি তথ্যের কোন শ্রেণির শ্রেণি পরিসংখ্যা ও ওই শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের অনুপাতকে ওই শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density) বলা হয়।

সুতরাং, কোনো শ্রেণির পরিসংখ্যা ঘনত্ব = $\frac{\text{উক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণি-দৈর্ঘ্য}}$

বুঝেছি ছক 2 নং -এর শ্রেণিবিন্যাসের, (70 – 105) শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব = 0.2

একইভাবে 105 – 140 শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব = ☐ [নিজে লিখি]

কিন্তু কোনো শ্রেণির শ্রেণি পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যার অনুপাতকে কী বলা হয়?

কোনো শ্রেণিবিন্যাসিত রাশিতথ্যের কোনো শ্রেণির শ্রেণি পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যার অনুপাতকে ওই শ্রেণিটির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) বলা হয়।

$\therefore$ কোনো শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = $\dfrac{\text{উক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}}$

বুঝেছি, 70 – 105 শ্রেণিটির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = $\dfrac{7}{50}$ = 0.14

105 – 140 শ্রেণিটির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = □ [নিজে লিখি]

যদি আপেক্ষিক পরিসংখ্যা শতকরায় প্রকাশ করি তাকে কী বলে?

আপেক্ষিক পরিসংখ্যাকে শতকরায় প্রকাশ করলে তাকে বলা হয় পরিসংখ্যার শতকার হার (Percentage frequency) অর্থাৎ

কোনো শ্রেণির পরিসংখ্যার শতকরা হার = $\dfrac{\text{উক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}} \times 100$

আমি ছক 2 -এর তথ্য নতুন ছকে সাজিয়ে লিখি :

[ফাঁকা ঘরে নিজে হিসাব করে লিখি]

ছক 3

একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে সকল শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যার যোগফল সর্বদা 1 এবং পরিসংখ্যার শতকরা হারের যোগফল সর্বদা 100.

দৈনিক খরচ	শ্রেণি পরিসংখ্যা	শ্রেণি-সীমা		শ্রেণি-সীমানা		মধ্য-মান	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব	আপেক্ষিক পরিসংখ্যা	পরিসংখ্যার শতকরা হার
		নিম্ন	উচ্চ	নিম্ন	উচ্চ					
70 – 105	07	70	105	70	105	87.5	35	0.2	0.14	0.14× 100 = 14
105 – 140	13	□	□	105	140	□	□	$\frac{13}{35}$ = .37	$\frac{13}{50}$ = .26	□
140 – 175	11	□	□	□	□	□	35	□	$\frac{11}{50}$ = .22	□
175 – 210	13	□	□	□	□	192.5	□	□	□	□
210 – 245	04	□	□	□	□	□	□	□	□	□
245 – 280	02	□	□	□	□	□	□	□	□	□
মোট	50								□	□

আমাদের স্কুলে ছাত্রছাত্রীরা সারা বছর ধরে স্কুলের বিভিন্ন অনুষ্ঠানে অংশগ্রহণ করে এবং ওই অনুষ্ঠানগুলোয় তারা তাদের মতো কিছু করে। তাই বছরের শেষে কিছু নম্বরও তাদের দেওয়া হয়।

4 এইরকমই আমাদের স্কুলের 40 জন ছাত্রছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বর নীচে লিখলাম।

30	23	45	40	29	34	15	01	41	12
11	12	49	03	13	02	29	30	24	29
25	03	13	32	39	19	49	07	43	09
41	13	02	44	27	12	22	32	25	31

1 – 10, 11 – 20, ... , 41 – 50 শ্রেণিগুলি নিয়ে নম্বরগুলির একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

ছক 4

শ্রেণি	শ্রেণি পরিসংখ্যা	শ্রেণি-সীমা		শ্রেণি-সীমানা		শ্রেণি মধ্যমান	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব
		নিম্ন	উচ্চ	নিম্ন	উচ্চ			
1 – 10	7	1	10	0.5	10.5	5.5	10	0.7
11 – 20	☐	11	20	10.5	20.5	15.5	10	0.9
21 – 30	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
31 – 40	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
41 – 50	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
মোট	40							

5 মিহির এক ঝুড়ি আপেলের ভিতর থেকে 35 টি আপেল নিয়ে তাদের ওজন (গ্রামে) নীচে লিখল।

82	109	107	141	165	115	93
172	92	86	70	150	126	130
129	100	119	84	99	113	106
111	136	90	115	110	78	90
107	131	104	110	118	80	128

আমি উপরের তথ্যের এমন একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করি যেন উহার প্রথম শ্রেণিটির মধ্যমান 70 গ্রাম হয় এবং প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 20 হয়।

প্রথম শ্রেণির মধ্যমান 70 গ্রাম এবং প্রত্যেক শ্রেণির প্রসার 20

$\therefore$ প্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা $= 70 - \frac{20}{2} = 60$

এবং ঊর্ধ্বসীমা $= 70 + \frac{20}{2} = 80$

$\therefore$ প্রথম শ্রেণি (60 – 80)

ছক 5

শ্রেণি ওজন (গ্রামে)	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা
60 – 80	II	2
80 – 100	~~IIII~~ IIII	9
100 – 120	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
120 – 140	~~IIII~~ I	6
140 – 160	II	2
160 – 180	II	2

6 নীচে 40টি দোকানের মাসিক ভাড়া (টাকায়) লিখেছি। 80 শ্রেণি দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি পরিসংখ্যা- বিভাজন ছক তৈরি করি।

380	420	490	370	820	370	755	620	540	790
840	750	630	440	740	440	480	540	690	360
510	820	770	720	740	470	520	570	620	670
770	470	640	840	810	310	380	430	750	670

[নিজে করি]

7 আজ সপ্তম শ্রেণির 40জন ছাত্রছাত্রীর 100 নম্বরের গণিত পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর জানানো হয়েছে।
তাদের প্রাপ্ত নম্বরগুলি নীচের ছকে লিখলাম।

32	40	45	92	83	48	56	71	77	49
61	97	36	44	52	67	85	70	45	56
81	73	39	50	74	60	48	64	80	44
45	64	42	71	70	42	75	41	78	60

আমি উপরের তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করি যার শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10

সর্বোচ্চ নম্বর = ☐, সর্বনিম্ন নম্বর = 31

পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি যার শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10

ছক 6

প্রাপ্ত নম্বর	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা (ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা)
30-40	III	3
40-50	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
50-60	IIII	4
60-70	~~IIII~~ I	6
70-80	~~IIII~~ IIII	9
80-90	IIII	4
90-100	II	2

7.1 আগের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে কতজন 50 থেকে 60 নম্বরের মধ্যে এবং কতজন 50 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে হিসাব করি :

দেখছি, 4 জন শিক্ষার্থী গণিতে 50 নম্বর থেকে 60 নম্বরের মধ্যে পেয়েছে।

কিন্তু মোট কতজন শিক্ষার্থী 50 নম্বরের কম পেয়েছে কীভাবে দেখব?

আগের ছক থেকে দেখছি,

40 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে 3 জন

40 ও 40-এর বেশি কিন্তু 50 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে 12 জন

$\therefore$ 50 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে মোট (3+12) জন

= 15 জন

সহজে হিসাবের জন্য পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নীচের মতো লিখলাম।

ছক - 7

প্রাপ্ত নম্বর	পরিসংখ্যা (ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা)
30-এর কম	0
40-এর কম	3
50-এর কম	3 + 12 = 15
60-এর কম	3 + 12 + 4 = 19
70-এর কম	3 + 12 + 4 + 6 = 25
80-এর কম	3 + 12 + 4 + ☐ + ☐ = ☐
90-এর কম	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 = 38
100-এর কম	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 + ☐ = ☐

এইরকম পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে কী বলা হয়?

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় শ্রেণি পরিসংখ্যাগুলিকে ক্রমে পরপর যোগ করে নতুন পরিসংখ্যা পেয়েছি। এই পরিসংখ্যা-বিভাজন তালিকাকে ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা (Less than type cumulative Frequency distribution table) বলা হয়।

7.2 একইভাবে 50 অথবা 50 নম্বরের বেশি নম্বর কত জন ছাত্রছাত্রী পেয়েছে হিসাব করি।

প্রথম পরিসংখ্যা বিভাজন ছক বা ছক 6 থেকে দেখছি,

50 বা 50-এর চেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে, মোট = (2 + 4 + 9 + 6 + 4) জন = 25 জন।

সহজে সুবিধার জন্য পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নীচের মতো লিখলাম।

প্রাপ্ত নম্বর	পরিসংখ্যা (ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা)
30 অথবা 30-এর বেশি	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 40
40 অথবা 40-এর বেশি	12 + 4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 37
50 অথবা 50-এর বেশি	4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 25
60 অথবা 60-এর বেশি	☐ + ☐ + ☐ + ☐ = 21
70 অথবা 70-এর বেশি	9 + 4 + 2 = 15
80 অথবা 80-এর বেশি	☐ + ☐ = ☐
90 অথবা 90-এর বেশি	2
100 অথবা 100-এর বেশি	0

এইরকম পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে কী বলা হয়?

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা (More than type cumulative Frequency Distribution table) বলা হয়।

উপরের তালিকা থেকে সহজেই দেখেছি 25 জন ছাত্রছাত্রী 50 বা 50-এর থেকে বেশি নম্বর পেয়েছে।

পেলাম, যে পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রত্যেকটি শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা দেখানো হয় তাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন বলা হয়।

দুই ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করা হয়।

(i) ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক। (ii) বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক।

উপরের ছক থেকে বলতে পারি, 50-60 শ্রেণির ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 19
এবং 50-60 শ্রেণির বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 25

কতজন ছাত্রছাত্রী 40 বা 40-এর চেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

8 অনুষ্কা ও কুশল স্কুলের 100 জন বন্ধুদের সপ্তাহের টিফিন খরচের একটি তালিকা তৈরি করেছে।

সাপ্তাহিক টিফিন খরচ (টাকা)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
বন্ধুদের সংখ্যা	13	12	20	13	23	19

আমি উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি এবং নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি।

(i) কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 80 টাকার কম লিখি।
(ii) কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 40 টাকা বা 40 টাকার বেশি লিখি।
(iii) কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 60 টাকা বা 60 টাকার বেশি, কিন্তু 100 টাকার কম লিখি।

আমি প্রথমে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

শ্রেণি-সীমানা সাপ্তাহিক খরচ (টাকা)	ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0-এর কম	0
20-এর কম	13
40-এর কম	25
60-এর কম	45
80-এর কম	58
100-এর কম	81
120-এর কম	100

শ্রেণি-সীমানা সাপ্তাহিক খরচ (টাকা)	বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
120 বা 120-এর বেশি	0
100 বা 100-এর বেশি	19
80 বা 80-এর বেশি	42
60 বা 60-এর বেশি	55
40 বা 40-এর বেশি	75
20 বা 20-এর বেশি	87
0 বা 0-এর বেশি	100

উপরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে দেখছি,

☐ জন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 80 টাকার কম।

☐ জন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 40 টাকা বা 40 টাকার বেশি।

সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 60 টাকা বা 60 টাকার বেশি কিন্তু 100 টাকার কম এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা,

$(81 - 45) = 36$ বা $(55 - 19) = 36$

ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে পেলাম

বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে পেলাম

আমি নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

শ্রেণি	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 — 7	5
7 — 14	14
14 — 21	25
21 — 28	42
28 — 35	50
35 — 42	61
42 — 49	65

প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি তৈরি করলাম।

শ্রেণি	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 — 7	5	5
7 — 14	14 – 5 = 9	14
14 — 21	25 – 14 = 11	25
21 — 28	42 – 25 = 17	42
28 — 35	50 – 42 = 8	50
35 — 42	61 – 50 = ☐	61
42 — 49	☐ – ☐ = 4	65

নিজে করি— 11.1

মৃগাঙ্ক তাদের কারখানার 30 জন কর্মচারীর বয়স লিখেছে।

বয়স (বছর)	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31	31–33	33–35
কর্মচারীর সংখ্যা	3	4	5	6	5	4	3

আমি উপরের তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি এবং সেখান থেকে নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি।

(i) কারখানায় 27 বছরের কম বয়সের কতজন কর্মচারী আছে লিখি।

(ii) 25 বছর বা 25 বছরের বেশি বয়সের কতজন কর্মচারী আছে লিখি।

(iii) 25 বছর বা 25 বছরের বেশি কিন্তু 33 বছরের কম বয়সের কতজন কর্মচারী আছে লিখি।

কষে দেখি— 11.1

1. পাড়ার 40 টি পরিবারের প্রত্যেকটি পরিবারের শিশুসংখ্যার তথ্য নীচে লিখেছি।

1	2	6	5	1	5	1	3	2	6
2	3	4	2	0	4	4	3	2	2
0	0	1	2	2	4	3	2	1	0
5	1	2	4	3	4	1	6	2	2

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি যার শ্রেণিগুলি হলো 0–2, 2–4, ... ইত্যাদি। এই পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে (i) শ্রেণি-অন্তর (ii) শ্রেণি-দৈর্ঘ্য (iii) শ্রেণি-পরিসংখ্যা (iv) শ্রেণি-সীমা বলতে কী বুঝি লিখি।

2. স্কুলের কোনো এক পরীক্ষায় 40 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা নীচে প্রদত্ত হলো :

34	27	45	21	30	40	11	47	01	15
03	40	12	47	48	18	30	24	25	28
32	31	25	22	27	41	12	13	02	44
43	07	09	49	13	19	32	39	24	03

1–10, 11–20, ..., 41–50 শ্রেণিগুলি নিয়ে নম্বরগুলির একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করি।

3. একটি ঝুড়িতে অনেকগুলি কমলালেবু রাখা আছে। এই এক ঝুড়ি কমলালেবু থেকে লক্ষ্যহীনভাবে 40টি কমলালেবু নিয়ে তাদের ওজন (গ্রামে) নীচে লিখলাম।

45, 35, 30, 55, 70, 100, 80, 110, 80,75, 85, 70, 75, 85, 90, 75, 90, 30, 55, 45, 40, 65, 60, 50, 40, 100, 65, 60, 40, 100, 75, 110, 30, 45, 84, 70, 80, 95, 85, 70.

এবার আমি উপরের তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক এবং একটি ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

4. মিতালী ও মহিদুল গ্রামের 45টি বাড়ির এই মাসের ইলেকট্রিক বিলের টাকার পরিমাণ নীচে লিখল।

116, 127, 100, 82, 80, 101, 91, 65, 95, 89, 75, 92, 129, 78, 87, 101, 65, 52, 59, 65, 95, 108, 115, 121, 128, 63, 76, 130, 116, 108, 118, 61, 129, 127, 91, 130, 125, 101, 116, 105, 92, 75, 98, 65,110.

আমি উপরের তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

5. মারিয়া একটি হাসপাতালের 300 জন রোগীর বয়স নীচের ছকে লিখল।

বয়স (বছরে)	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
রোগীর সংখ্যা	80	40	50	70	40	20

আমি উপরের তথ্যের বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

6. নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি দেখি এবং একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

শ্রেণি	10 -এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	17	22	29	37	50	60

7. নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি দেখি এবং একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা
60 -এর বেশি	0
50 -এর বেশি	16
40 -এর বেশি	40
30 -এর বেশি	75
20 -এর বেশি	87
10 -এর বেশি	92
0 -এর বেশি	100

8. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

i) নিম্নের কোনটি তথ্যের চিত্র উপস্থাপন
(a) দণ্ডলেখ (b) কাঁচা তথ্য (c) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (d) পরিসংখ্যা বিভাজন।

ii) 12, 25, 15, 18, 17, 20, 22, 26, 6, 16, 11, 8, 19, 10, 30, 20, 32 তথ্যের প্রসার
(a) 10 (b) 15, (c) 18 (d) 26

iii) 1-5, 6-10 , ... শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য
(a) 4 (b) 5 (c) 4.5 (d) 5.5

iv) একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার শ্রেণির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে 15, 20, 25, 30 ....।
যে শ্রেণির মধ্যবিন্দু 20 সেটি হলো,
(a) 12.5 – 17.5 (b) 17.5 – 22.5 (c) 18.5 – 21.5 (d) 19.5 – 20.5

v) একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় একটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু 10 এবং প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 6; শ্রেণিটির নিম্নসীমা
(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 12

9. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

a) একটি অবিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার একটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু m এবং উচ্চশ্রেণি-সীমানা u হলে নিম্নশ্রেণি সীমানাটি কত তা বের করি।

b) একটি অবিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় একটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু 42 এবং শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 10 হলে শ্রেণিটির উচ্চ ও নিম্ন সীমা কত তা লিখি।

c)

শ্রেণিসীমা	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89
পরিসংখ্যা	3	4	5	8

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার প্রথম শ্রেণির পরিসংখ্যা ঘনত্ব কত তা লিখি।

d) (c) প্রশ্নের শেষ শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা কত তা লিখি।

e) নীচের উদাহরণগুলিতে কোনগুলি গুণ এবং কোনগুলি চল নির্দেশ করে লিখি :
i) পরিবারের জনসংখ্যা ii) দৈনন্দিন তাপমাত্রা iii) শিক্ষাগত মান iv) মাসিক আয়
v) মাধ্যমিক পরীক্ষায় প্রাপ্ত গ্রেড

আজ ধ্রুব ও অহনা ঠিক করেছে ছক 3-এর পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির লৈখিক উপস্থাপন করে গ্রামবাসীদের আর্থিক অবস্থার একটি চিত্র তুলে ধরবে।

10 ছক 3-এর অবিচ্ছিন্ন চলের তথ্যটির লৈখিক উপস্থাপন করার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

(i) প্রথমে x-অক্ষ (অনুভূমিক রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 35 টাকা [অথবা 0.5 সেমি. = 35 টাকা] নিয়ে পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণিবিভাগগুলির শ্রেণি সীমানাগুলির মানগুলিকে কোনো ফাঁক না রেখে পরপর স্থাপন করলাম। অর্থাৎ অনুভূমিক রেখাটি 70–105, 105–140....... শ্রেণি বিভাগগুলির অনুরূপ কয়েকটি অংশে বিভক্ত করলাম। যেহেতু 0 থেকে শুরু না করে 70 থেকে শুরু করব তাই x-অক্ষে বা অনুভূমিক রেখায় একটি (–⩘⩘–) ভগ্নরেখা নির্দেশ করব।

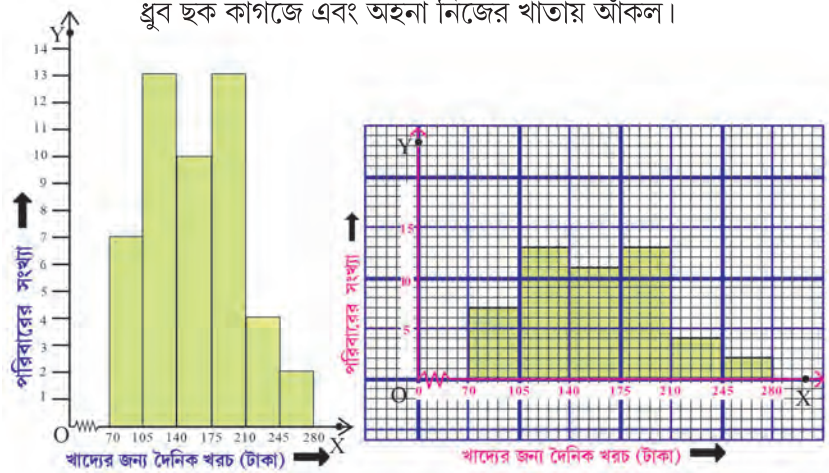
দৈনিক খরচ শ্রেণি	শ্রেণি সীমানা		শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	শ্রেণি পরিসংখ্যা
	নিম্ন	উচ্চ		
70 – 105	70	105	35	7
105 – 140	105	140	35	13
140 – 175	140	175	35	11
175 – 210	175	210	35	13
210 – 245	210	245	35	4
245 – 280	245	280	35	2
				মোট = 50

আবার y-অক্ষ (উলম্ব রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 টি পরিবার [অথবা 0.5 সেমি. = 1 টি পরিবার] নিয়ে নীচের ছবির মতো কতকগুলি পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করলাম যার প্রস্থ শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য এবং দৈর্ঘ্য অর্থাৎ এক্ষেত্রে উচ্চতা অনুরূপ শ্রেণির পরিসংখ্যা বা পরিসংখ্যা ঘনত্বের সমান দৈর্ঘ্য এককে হয়। যখন শ্রেণিগুলির দৈর্ঘ্যগুলি সমান হয় না, তখন উচ্চতাগুলির দৈর্ঘ্যগুলিকে অনুরূপ পরিসংখ্যা ঘনত্বের সাথে সমানুপাতী নিতে হয়। ছক কাগজে 70-105 শ্রেণি অন্তরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ 5 একক এবং দৈর্ঘ্য 7 একক।

ধ্রুব ছক কাগজে এবং অহনা নিজের খাতায় আঁকল।

পরিবারের সংখ্যা
খাদ্যের জন্য দৈনিক খরচ (টাকা)

আমরা এইভাবে লেখচিত্র অঙ্কন করে কতকগুলি আয়তক্ষেত্র পেলাম যাদের মধ্যে কোনো ফাঁক নেই এবং আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণিগুলির পরিসংখ্যার সমানুপাতী।

অবিচ্ছিন্ন চলের শ্রেণি-বিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের এরকম আয়তক্ষেত্রের মাধ্যমে লৈখিক উপস্থাপনকে কী বলা হয়?

অবিচ্ছিন্ন চলের শ্রেণি বিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক উপস্থাপনকে আয়তলেখ (Histogram) বলা হয়।

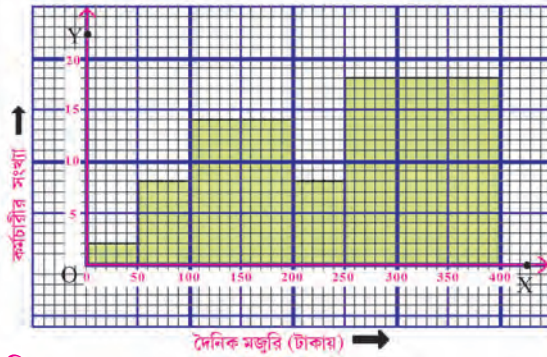
আয়তলেখ হলো পরস্পর সংলগ্ন একগুচ্ছ আয়তক্ষেত্র। প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণির পরিসংখ্যার বা পরিসংখ্যা ঘনত্বের সমানুপাতী।

আমাদের পাড়ার একটি ছোটো লোহার যন্ত্রপাতি তৈরির কারখানায় অনেক কর্মচারী কাজ করেন। আমরা তাদের কিছুজনের দৈনিক মজুরির (টাকায়) একটি তালিকা তৈরি করেছি।

11 সেই তালিকাটি হলো,

দৈনিক মজুরি (টাকায়)	0 – 50	50 – 100	100 – 200	200 – 250	250 – 400
কর্মচারীর সংখ্যা	2	8	14	8	18

আমি উপরের তথ্যকে একটি আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করি।
প্রথমে উপরের তথ্যের নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করলাম।

শ্রেণি (দৈনিক মজুরি টাকায়)	শ্রেণি সীমানা দ্বারা নির্দিষ্ট শ্রেণি	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা
0 – 50	0 – 50	50	2
50 – 100	50 – 100	50	8
100 – 200	100 – 200	100	14
200 – 250	200 – 250	50	8
250 – 400	250 – 400	150	18
মোট			50

পরিসংখ্যা বিভাজনের ছকটির শ্রেণি-বিভাগগুলির লৈখিক উপস্থাপন করলাম। x-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 একক এবং y-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরে আয়তলেখ অঙ্কন করেছি।
দেখছি পাশের লৈখিক চিত্রটিতে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলগুলি আয়তলেখর শ্রেণি-পরিসংখ্যার সমানুপাতী নয়।

কিন্তু কেন এমন হলো?

বুঝেছি, পূর্বে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে শ্রেণি দৈর্ঘ্যগুলি সমান ছিল। কিন্তু এই ছকে শ্রেণি-দৈর্ঘ্যগুলি অসমান।

এই রকমক্ষেত্রে অর্থাৎ পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণি-দৈর্ঘ্যগুলি যখন সমান নয়, তখন আয়তলেখর মাধ্যমে তথ্যটি কীভাবে উপস্থাপন করব?

এইরকম ক্ষেত্রে আমাদের নীচের দুটি ধাপ অনুসরণ করতে হবে।

(i) প্রথমে সুবিধামতো সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্যর একটি শ্রেণি-অন্তর বেছে নেব। উপরের উদাহরণে সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 50 বেছে নিলাম।

(ii) এবার আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য (উলম্ব) এমন করব যাতে অন্যান্য সকল আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 50 শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী হয়।

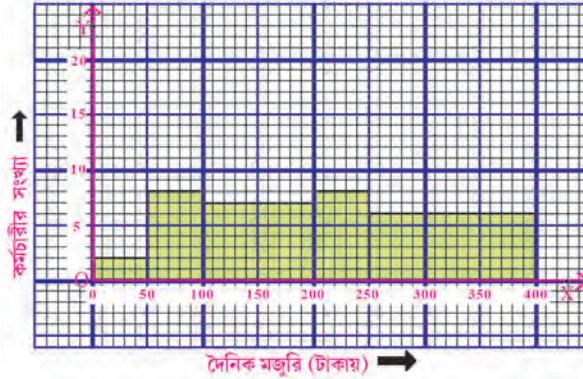
যেমন, যখন শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 100 তখন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 14

সুতরাং, যখন শ্রেণি দৈর্ঘ্য 50 তখন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{14}{100} \times 50 = 7$

একইভাবে, আয়তলেখর আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যগুলি হিসাব করে লিখি।

শ্রেণি (দৈনিক মজুরি টাকায়)	পরিসংখ্যা	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য
0 – 50	2	50	$\frac{2}{50} \times 50 = 2$
50 – 100	8	50	$\frac{8}{50} \times 50 = 8$
100 – 200	14	100	$\frac{14}{100} \times 50 = 7$
200 – 250	☐	☐	$\frac{8}{50} \times 50 = 8$
250 – 400	☐	☐	$\frac{18}{150} \times 50 = 6$

উপরের ছকে দৈনিক মজুরি প্রতি 50 টাকায় শ্রমিক সংখ্যা পেয়েছি।

আগের পাতার ছকের হিসাব অনুযায়ী প্রদত্ত তথ্যের সঠিক আয়তলেখ অঙ্কন করি যার প্রস্থ সমান নয়।

যদি সংগৃহীত তথ্যটি নিম্নরূপ হতো,

দৈনিক মজুরি (টাকায়)	0–50	50–150	150–200	200–300	300–350
কর্মচারীর সংখ্যা	200	900	600	1200	1000

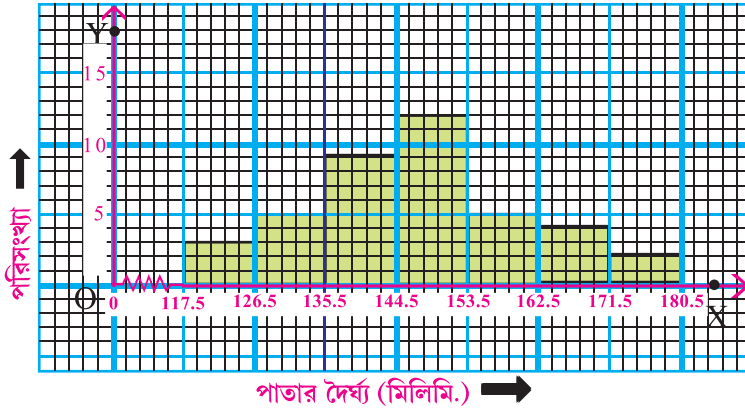
নিজে আয়তলেখ অঙ্কন করি

12 সিমরন ও রাহুল অনেকগুলি গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মেপে যে তথ্যগুলি পেল সেগুলি নীচের ছকে লিপিবদ্ধ করল।

পাতার দৈর্ঘ্য [মিলিমি.]	118–126	127–135	136–144	145–153	154–162	163–171	172–180
পাতার সংখ্যা	3	5	9	12	5	4	2

আমি আগের পাতার তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

পাতার দৈর্ঘ্যের শ্রেণি (মিলিমি.)	শ্রেণি সীমানা দ্বারা নির্দিষ্ট শ্রেণি	শ্রেণি দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা
118 – 126	117.5 – 126.5	9	03
127 – 135	126.5 – 135.5	9	05
136 – 144	135.5 – 144.5	9	09
145 – 153	144.5 – 153.5	9	12
154 – 162	153.5 – 162.5	9	05
163 – 171	162.5 – 171.5	9	04
172 – 180	171.5 – 180.5	9	02

আমি উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

x -অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 মিলিমি. এবং y অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির আয়তলেখ অঙ্কন করলাম।

আমি কোন অবিচ্ছিন্ন চলের শ্রেণিবিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের তালিকার আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য কী কী পদ্ধতিতে অঙ্কন করলাম লিখি।

আয়তলেখ অঙ্কনের পদ্ধতি পেলাম —

(i) অবিচ্ছিন্ন চলের মানগুলিকে সাধারণত অনুভূমিক রেখা বরাবর এবং শ্রেণি-পরিসংখ্যাগুলিকে উল্লম্ব রেখা বরাবর নেওয়া হয়। অনুভূমিক রেখা বরাবর (অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর) পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণি বিভাগগুলির শ্রেণিসীমানাগুলির মানগুলিকে কোনো ফাঁক না রেখে পর পর সংস্থাপিত করা হয়। ফলে অনুভূমিক রেখাটি শ্রেণি-বিভাগের অনুরূপ কয়েকটি অংশে বিভক্ত হয়।

(ii) যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণি-বিভাগগুলি সমদৈর্ঘ্যের হয়, তবে প্রত্যেকটি অংশের উপর নির্দিষ্ট শ্রেণি-বিভাগের পরিসংখ্যার সমান (বা পরিসংখ্যার সমানুপাতিক) দৈর্ঘ্যের একটি করে আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা হয়।

(iii) যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণি-বিভাগগুলি সমদৈর্ঘ্যের না হয়, সুবিধামতো সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের একটি শ্রেণি-অন্তর বেছে নিয়ে প্রতিটি শ্রেণি-বিভাগের পরিসংখ্যা সমানুপাতে নির্ণয় করা হয় এবং প্রতিটি অংশের উপর অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য অনুরূপ শ্রেণি-বিভাগের নির্ধারিত পরিসংখ্যার সমান হয়।

(নবম শ্রেণিতে অসম দৈর্ঘ্যের শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ পাঠ্যসূচি বহির্ভূত)।

13 মেঘা অন্য এক ছোটো কারখানার শ্রমিকদের নির্দিষ্ট সময়ে কাজের মজুরি নীচের ছকে লিখল।

দৈনিক বেতন (টাকায়)	100	90	80	70	60	50
শ্রমিক সংখ্যা	6	4	12	16	20	12

আমি উপরের তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

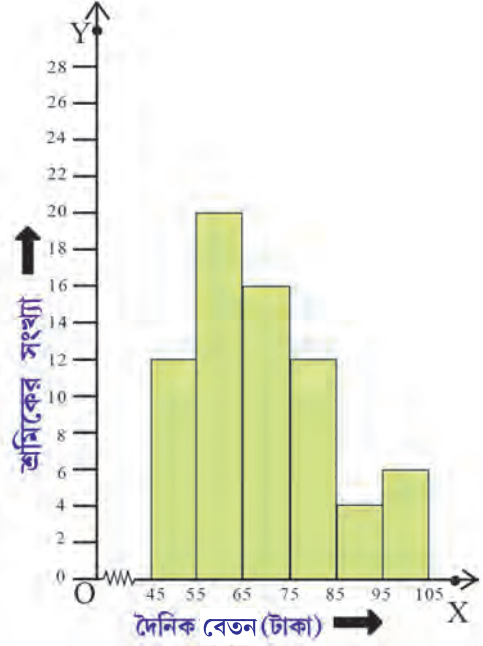
দেখছি, মেঘার সংগ্রহ করা তথ্যগুলি শ্রেণি-সাপেক্ষে নয়। এক্ষেত্রে তথ্যে লেখচিত্র কীভাবে অঙ্কন করা যায় দেখি।

দেখছি, দুটি ক্রমিক বেতনের অন্তর 10

∴ সমদৈর্ঘ্যের শ্রেণি পাওয়ার জন্যে 100, 90, 80, 70 বেতন সমূহকে 95 – 105, 85 – 95, 75 – 85, 65 – 75, ... প্রভৃতি শ্রেণি অন্তরের মধ্যবিন্দু নেব।

$[\therefore (100 - \frac{10}{2}) - (100 + \frac{10}{2}) \rightarrow (95 - 105)]$

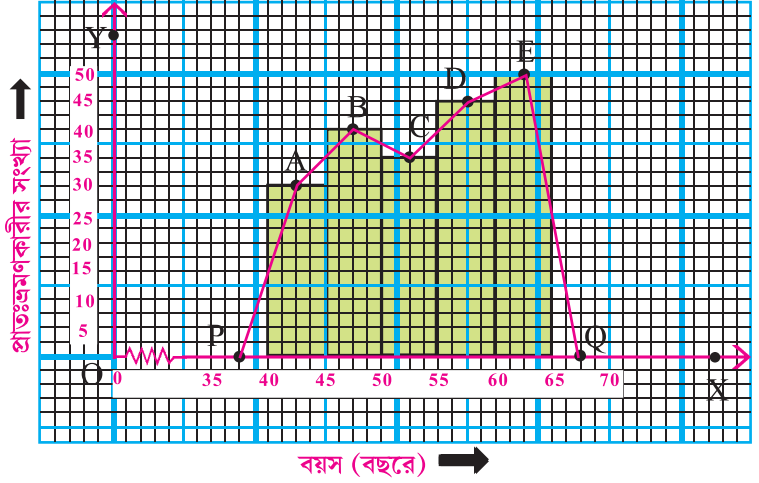
∴ প্রদত্ত তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য পরিসংখ্যা-বিভাজন ছকটি পেলাম :

শ্রেণি (দৈনিক বেতন টাকায়)	পরিসংখ্যা (শ্রমিক সংখ্যা)
95 — 105	06
85 — 95	04
75 — 85	12
65 — 75	16
55 — 65	20
45 — 55	12
মোট	70

আমি অনুভূমিক রেখায় **1 সেমি. = 10 টাকা** বেতন এবং উল্লম্ব রেখায় **0.5 সেমি. = 2 জন** শ্রমিক ধরে অবিচ্ছিন্ন চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করলাম।

14 আমি আমার দাদুর সঙ্গে প্রতিদিন ভোরে বোটানিক্যাল্ গার্ডেনে প্রাতঃভ্রমণে যাই। আজ আমি ও আমার বন্ধু সাহানা ঠিক করেছি আজ যতজন প্রাতঃভ্রমণে এসেছে তাদের বয়স অনুযায়ী তথ্য সংগ্রহ করে লিখব। আজ আমাদের সংগ্রহ করা তথ্যটি হলো,

শ্রেণি (বয়স বছরে)	40–45	45–50	50–55	55–60	60-65
পরিসংখ্যা	30	40	35	45	50

আমরা আগের সংগৃহীত তথ্যটি একটি আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করব

x-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 4টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 5 বছর এবং y-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 টি বাহুর দৈর্ঘ্য=5 জন প্রাতঃভ্রমণকারী ধরে উপরের সংগৃহীত তথ্যটির আয়তলেখ অঙ্কন করলাম।

আমার ভাই রোহিত মজার কান্ড করল, সে আমার আঁকা আয়তলেখের পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্রের উপরের বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি A,B,C,D ও E দিয়ে চিহ্নিত করল।

দেখছি, A,B,C,D, E -এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (42.5, 30), (47.5, 40), (52.5, 35), (57.5, 45) এবং (62.5, 50)

শ্রেণি	শ্রেণি মধ্যমান	পরিসংখ্যা
40–45	42.5	30
45–50	47.5	40
50–55	52.5	35
55–60	57.5	45
60–65	62.5	50

আমি A,B; B,C; C,D; D,E; সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলাম এবং এই A,B,C,D কে নিয়ে বহুভুজ গঠনের জন্য x-অক্ষে P (37.5,0) এবং Q (67.5,0) দুটি বিন্দু নিয়ে A, P; E, Q সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলাম।

37.5 হলো (35-40) -এর মধ্যবিন্দু এবং 67.5 হলো ☐ - ☐ -এর মধ্যবিন্দু

দেখছি, PABCDEQ বহুভুজ পেলাম। এই বহুভুজকে কী বলা হয়?

PABCDEQ বহুভুজটিকে প্রদত্ত তথ্যের পরিসংখ্যা বহুভুজ [Frequency Polygon] বলা হয়।

কোনো অবিচ্ছন্ন চলের সমদৈর্ঘ্যের শ্রেণিগুলির মাধ্যমে প্রকাশিত পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক-উপস্থাপনের জন্য **পরিসংখ্যা বহুভুজ** অঙ্কন করা হয়। এক্ষেত্রে ধরে নেওয়া হয় যে কোনো শ্রেণির অন্তর্গত চলের মানগুলি অনুরূপ শ্রেণির মধ্যবিন্দুতে কেন্দ্রীভূত [কখনও কখনও বিচ্ছিন্ন চলের পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপনের জন্যও পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হয়।]

কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনের পরিসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল পরিসংখ্যা বিভাজনটির আয়তলেখর ক্ষেত্রফলের সমান হবে। ত্রিভুজের সর্বসমতার সাহায্যে আয়তলেখর ক্ষেত্রফল এবং পরিসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল সমান দেখাই।

আমি আমাদের স্কুলের 100 জন বন্ধুদের ওজন (কিগ্রা) নিয়েছি। সেগুলি হলো,

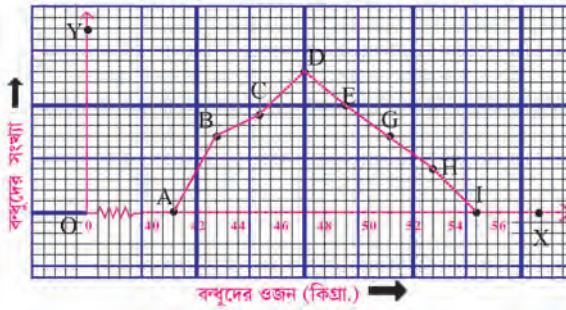
বন্ধুদের ওজন (কিগ্রা.)	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	52–54
বন্ধুদের সংখ্যা	14	18	26	20	14	8

15 আমি উপরের তথ্যটি পরিসংখ্যা বহুভুজের মাধ্যমে প্রকাশ করি।

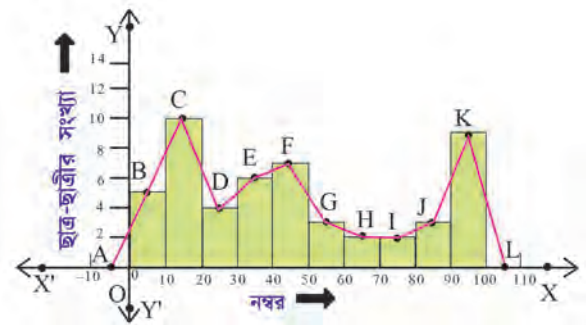
1) আমি প্রথমে পরিসংখ্যান বিভাজন ছকটি করলাম।

2) এবার x -অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 4টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 কিগ্রা. এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 জন বন্ধু ধরি।

শ্রেণি	শ্রেণি-মধ্যক বা মধ্যমান	পরিসংখ্যা
42–44	43	14
44–46	45	18
46–48	47	26
48–50	49	20
50–52	51	14
52–54	53	8
মোট		100

প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণিমধ্যমান ভুজ এবং শ্রেণি পরিসংখ্যা কোটি ধরে (43,14), (45,18), (47,26), (49,20), (51,14), (53,8) বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম; এবার ওই বিন্দুগুলি পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলাম এবং বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করার জন্য x-অক্ষের উপর প্রথম শ্রেণিসীমানার ঠিক আগের শ্রেণি সীমানার '0' (শূন্য) পরিসংখ্যা বিশিষ্ট মধ্যবিন্দু ও শেষ শ্রেণিসীমানার ঠিক পরের শ্রেণিসীমানার '0' (শূন্য) পরিসংখ্যা বিশিষ্ট মধ্যবিন্দুও সরলরেখাংশ দিয়ে যোগ করে (এখানে (41,0) ও (55,0) যোগ করে) নির্ণেয় ABCDEFGHI বহুভুজটি পেলাম।

সাবিনাদের স্কুলে 51 জন ছাত্র-ছাত্রী 100 নম্বরের মধ্যে নিম্নলিখিত নম্বর পেয়েছে।

নম্বর	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা
0-10	5
10-20	10
20-30	4
30-40	6
40-50	7
50-60	3
60-70	2
70-80	2
80-90	3
90-100	9
	মোট = 51

আমি ওই পরিসংখ্যা বিভাজনের ছক থেকে একটি আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

XOX' ও YOY' দুটি অক্ষ লম্বভাবে অঙ্কন করলাম। x -অক্ষ বরাবর 0.5 সেমি. দৈর্ঘ্য = 10 নম্বর এবং y -অক্ষ বরাবর 0.5 সেমি. দৈর্ঘ্য = 1 জন ধরে আয়তলেখটি অঙ্কন করি।

এবার পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনের জন্য প্রথম শ্রেণির ঠিক আগের একটি শ্রেণি –10-0 এবং শেষ শ্রেণির ঠিক পরের শ্রেণি 100-110 নিই। এই দুই শ্রেণির পরিসংখ্যা '0' হবে।

এরপর (-5,0), (5,5), (15,10), (25,4), (35,6), (45,7), (55,3), (65,2), (75,2), (85,3), (95,9), (105,0) বিন্দুগুলি পরপর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করে ABCDEFGHIJKL পরিসংখ্যা বহুভুজটি অঙ্কন করলাম।

আমাদের পাড়ায় A ও B দুটি দলের ক্রিকেট খেলা চলছে। প্রথম 5 ওভারে অর্থাৎ $5 \times 6 = 30$ টি বলে কোন দল কত রান করেছে তা ছক করে নীচে লিখলাম।

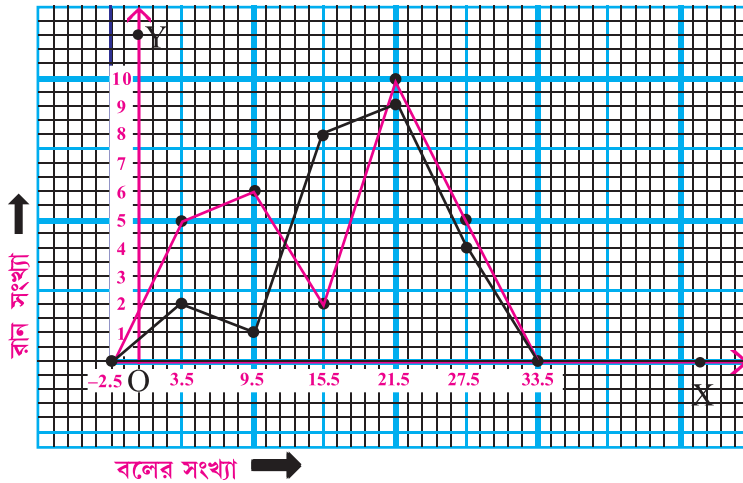
বলের সংখ্যা	1-6	7-12	13-18	19-24	25-30
A দলের রান	2	1	8	9	4
B দলের রান	5	6	2	10	5

16 আমি একই ছক কাগজে উপরের দুটি দলের তথ্যগুলির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি ও তুলনা করি।

আমি প্রথমে তথ্যগুলির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি

শ্রেণি (বলের সংখ্যা)	শ্রেণি সীমানা	শ্রেণির মধ্যমান	A দলের রান	B দলের রান
1–6	0.5–6.5	3.5	2	5
7–12	6.5–12.5	9.5	1	6
13–18	12.5–18.5	15.5	8	2
19–24	18.5–24.5	21.5	9	10
25–30	24.5–30.5	27.5	4	5

আমি বলের সংখ্যা x-অক্ষ বরাবর এবং রানের পরিমাণ y-অক্ষ বরাবর নিলাম। x-অক্ষ বরাবর 5টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 6 বল এবং y-অক্ষ বরাবর 2টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 রান বসাই। A দলের জন্য (3.5, 2), (9.5, 1), (15.5, 8), (21.5, 9), (27.5, 4) বিন্দুগুলি স্থাপন করে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যোগ করে A দলের পরিসংখ্যা বহুভুজ পেলাম।

একইভাবে, B দলের জন্য (3.5, 5), (9.5, 6), (15.5, 2), (21.5, 10), (27.5, 5) বিন্দুগুলি স্থাপন করে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যোগ করে B দলের পরিসংখ্যা বহুভুজ পেলাম।

দেখছি, পরিসংখ্যা বহুভুজের সাহায্যে আমরা একাধিক তথ্যের সহজে তুলনা করতে পারি।

কষে দেখি— 11.2

1. বকুলতলা গ্রামের 50টি দোকানের দৈনিক লাভ (টাকা) নীচে ছক করে লিখলাম।

দৈনিক লাভ (টাকা)	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250
দোকানের সংখ্যা	8	15	10	12	5

উপরের তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

2. মিতা তাদের স্কুলের 75 জন বন্ধুদের উচ্চতা মেপে নীচের ছকে লিখল।

উচ্চতা (সেমি.)	136–142	142–148	148–154	154–160	160–166
বন্ধুদের সংখ্যা	12	18	26	14	05

আমি মিতার সংগ্রহ করা তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

3. আমাদের পাড়ায় 10 বছর থেকে 45 বছর বয়স পর্যন্ত বাসিন্দাদের মধ্যে হিন্দিভাষী লোকের সংখ্যা সংগ্রহ করে নীচের ছকে লিখলাম।

বয়স (বছরে)	10–15	16–21	22–27	28–33	34–39	40–45
হিন্দিভাষী লোকের সংখ্যা	8	14	10	20	6	12

আমি উপরের তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

4. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

শ্রেণি	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60
পরিসংখ্যা	8	3	6	12	2	7

5. আমি পৃথাদের স্কুলের 75 জন শিক্ষার্থীদের নিম্নলিখিত প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

প্রাপ্ত নম্বর	30	40	50	60	70	80
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	12	18	21	15	6	3

ছক কাগজে অনুভূমিক ও উলম্বরেখা বরাবর সুবিধামতো মাপ নিয়ে (20,0), (30,12), (40,18), (50,21), (60,15), (70,6), (80,3) ও (90,0) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি ও যোগ করে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

6. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি

শ্রেণি	0-5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
পরিসংখ্যা	4	10	24	12	20	8

7. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

চাঁদার পরিমাণ (টাকা)	20	25	30	35	40	45	50
সদস্য সংখ্যা	20	26	16	10	4	18	6

8. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

শিশুসংখ্যা	0	1	2	3	4	5
পরিবার সংখ্যা	120	85	50	25	15	5

সংকেত: প্রথমে রাশিতথ্যকে শ্রেণি বহির্ভূত পদ্ধতি অনুসারে শ্রেণি সীমানাসহ নীচের মতো পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করে নেব।

শিশুসংখ্যা:	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
পরিবার সংখ্যা	120	85	50	25	15	5

9. বীরসিংহ গ্রামের বিদ্যাসাগর প্রাথমিক বিদ্যালয়ে 32 জন শিক্ষক/শিক্ষিকাদের বয়স নীচের ছকে লিখলাম।

বয়স (বছর)	25–31	31–37	37–43	43–49	49–55
শিক্ষক/শিক্ষিকার সংখ্যা	10	13	05	03	01

আমি উপরের তথ্যটির আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজের মাধ্যমে লৈখিক উপস্থাপন করি।

10. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

শ্রেণি	75–80	80–85	85–90	90–100	100–105
পরিসংখ্যা	12	18	22	10	8

11. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

শ্রেণি	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50
পরিসংখ্যা	8	3	6	12	4

12. আমাদের গ্রামে সকল নারীদের স্বাক্ষর করার বিশেষ ব্যবস্থা নেওয়া হবে। তাই আমরা নীচের তথ্যটি সংগ্রহ করেছি।

বয়স	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
স্বাক্ষরহীনের সংখ্যা	40	90	100	60	160

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

13. গত মাসে আমাদের কলকাতা ফুটবল-লিগে দলগুলির দেওয়া গোলের পরিসংখ্যা নীচে লিখেছি।

স্কোর	0	1	2	3	4	5	6
পরিসংখ্যা	15	20	12	8	6	3	1

উপরের রাশিতথ্য উপস্থাপনের জন্য একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

14. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.)

(i) একটি আয়তলেখর প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমানুপাতী হবে

(a) ওই শ্রেণির মধ্যবিন্দুর সাথে

(b) ওই শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্যের সাথে

(c) ওই শ্রেণির পরিসংখ্যার সাথে

(d) ওই শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার সাথে

(ii) একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হয় শ্রেণির পরিসংখ্যা এবং

(a) শ্রেণির উচ্চ সীমানা দ্বারা

(b) শ্রেণির নিম্ন সীমানা দ্বারা

(c) শ্রেণির মধ্যমান দ্বারা

(d) শ্রেণির যেকোনো মান দ্বারা

(iii) আয়তলেখ অঙ্কনের ক্ষেত্রে শ্রেণি সীমানা নেওয়া হয়

(a) y-অক্ষ বরাবর

(b) x-অক্ষ বরাবর

(c) x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয় বরাবর

(d) x-অক্ষ ও y-অক্ষের মধ্যে

(iv) আয়তলেখ অঙ্কনের ক্ষেত্রে প্রতিটি শ্রেণির আয়তক্ষেত্রের ভূমি হয়

(a) পরিসংখ্যা

(b) শ্রেণি সীমানা

(c) প্রসার

(d) শ্রেণি দৈর্ঘ্য

(v) একটি আয়তলেখ বিন্যস্ত তথ্যের লৈখিক প্রকাশ যার শ্রেণি-সীমানা এবং পরিসংখ্যা নেওয়া হয় যথাক্রমে

(a) উল্লম্ব ও অনুভূমিক অক্ষ বরাবর

(b) কেবলমাত্র উল্লম্ব অক্ষ বরাবর

(c) কেবলমাত্র অনুভূমিক অক্ষ বরাবর

(d) অনুভূমিক এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর

12 ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য
(THEOREMS ON AREA)

1 আমাদের বাড়ির মেঝেতে আয়তক্ষেত্রাকার টালি বসানো হয়েছে। এখনও 18টি সমান মাপের টালি অতিরিক্ত হিসাবে পড়ে আছে। আমরা ঠিক করেছি ওই 18টি টালি আমাদের বাগানের পেয়ারা গাছের গোড়ার চারদিকে লাগিয়ে দেবো। কিন্তু ওই 18টি সমান মাপের আয়তক্ষেত্রাকার টালিগুলি দিয়ে গাছের গোড়ার কতটা জায়গা ভরাট করতে পারব? প্রথমে 1টি টালি কতটা জায়গা জুড়ে থাকবে হিসাব করি। অর্থাৎ, 1টি আয়তক্ষেত্রাকার টালির ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

মেপে দেখছি, আয়তক্ষেত্রাকার টালির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং প্রস্থ 10 সেমি.।

$\therefore$ 1 টি টালির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= 15 সেমি. × 10 সেমি.

= 150 বর্গ সেমি.

যেহেতু, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ (এটি একটি স্বতঃসিদ্ধ)

$\therefore$ 18 টি একই মাপের আয়তক্ষেত্রাকার টালি দিয়ে (150 × 18) বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি. জায়গা ভরাট করতে পারব।

কিন্তু যদি টালিটির আকার আয়তক্ষেত্রাকার না হয়ে নীচের ছবির মতো হতো তাহলে কি ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যেত?

তখনও টালিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যেত কিন্তু কঠিন হতো।

ক্ষেত্রফল বলতে কী বুঝি?

ক্ষেত্রফল হলো কোনো ক্ষেত্রের পরিমাপ (Magnitude or measure)। এই পরিমাপটি কোনো একক (Unit) সমেত প্রকাশ করা হয়। যেমন 150 বর্গ সেমি. কোনো ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

 — এই সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= নীল অংশের ক্ষেত্রফল + লাল অংশের ক্ষেত্রফল।

যদি প্রতিটি টালির মাপ (size) ও আকার (shape) একই রকম হয় অর্থাৎ প্রতিটি টালিকে একটির উপর অপরটি বসিয়ে দিলে সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় তাহলে কি ওদের ক্ষেত্রফল সমান হবে?

যদি দুটি সামতলিক ক্ষেত্রের আকার ও মাপ সমান হয় অর্থাৎ সর্বসম হয়, সেক্ষেত্রে তাদের ক্ষেত্রফলও সমান হবে।

কিন্তু যদি দুটি সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তবে কি সামতলিক ক্ষেত্রদুটি সর্বসম হবে?

এই সামতলিক ক্ষেত্রদুটির ক্ষেত্রফল সমান, কিন্তু এরা সর্বসম নয়। অর্থাৎ একটির উপর অপরটি বসিয়ে দিলে সম্পূর্ণভাবে মিলে যাবে না।

আমরা কোনো সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের কী কী ধর্ম পেলাম লিখি।

(i) A ও B দুটি সামতলিক ক্ষেত্র সর্বসম হলে A -এর ক্ষেত্রফল = B -এর ক্ষেত্রফল হবে ।

(ii) একটি সামতলিক ক্ষেত্রকে দুটি আলাদা আলাদা (যদি একটি ক্ষেত্র অপরটির ক্ষেত্রের কোনও জায়গা না নেয়) অংশ A ও B তে বিভক্ত করলে,

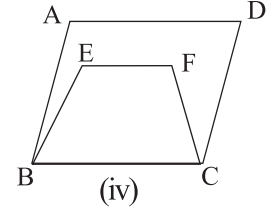
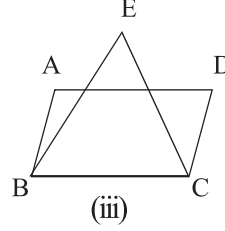
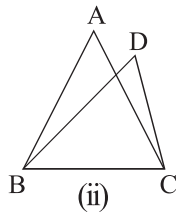
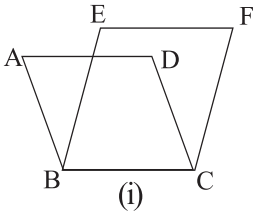
সমগ্র সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = A অংশের ক্ষেত্রফল + B অংশের ক্ষেত্রফল।

নানান মাপের ও আকারের টালির ক্ষেত্রফলের ধারণা পাওয়ার জন্য আমার দাদা খাতায় অনেকগুলি বহুভুজাকার চিত্র আঁকল। সে আঁকল

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

আমি দাদার আঁকা চিত্রগুলির মধ্যে মিল খুঁজি

(i) নং চিত্রে দেখছি, ABCD ও EBCF দুটি সামান্তরিক যাদের একই ভূমি BC। কিন্তু A, D, F ও E একই সরলরেখায় নেই । অর্থাৎ সমরেখ নয়।

আবার (ii) নং চিত্রে, ΔABC ও ΔDBC -এর একই ভূমি [ ]

(iii) নং চিত্রে [ ] ও [ ] -এর একই ভূমি [ ], কিন্তু A, E, D সমরেখ নয়।

(iv) নং চিত্রের সামান্তরিক ABCD এবং ট্রাপিজিয়াম EBCF-এর একই ভূমি [ ]

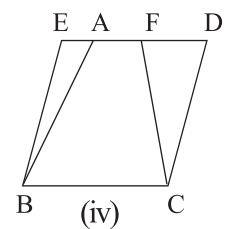
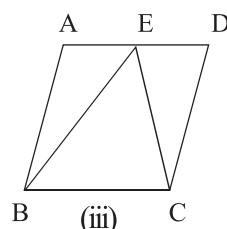
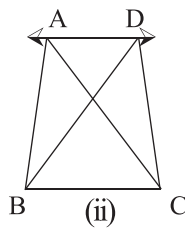
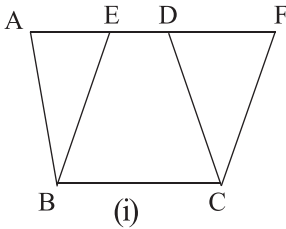
কিন্তু E, F, D, A সমরেখ নয়।

আমি দাদার আঁকা চিত্রগুলি অন্যভাবে আঁকি

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

আমি বোনের আঁকা (i) নং ছবিতে দেখছি,

ABCD এবং EBCF সামান্তরিক দুটির একই ভূমি BC, কিন্তু BC সাধারণ ভূমির উপরের দিকের শীর্ষ বিন্দুগুলি A, D, E ও F, AF সরলরেখায় অবস্থিত এবং AF ∥ BC

অর্থাৎ বলতে পারি ABCD এবং EBCF সামান্তরিক দুটি **একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল BC ও AF**-এর মধ্যে অবস্থিত।

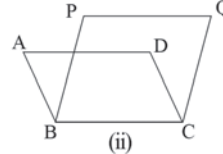
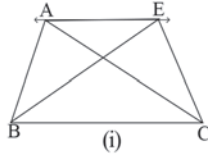
বাকি ছবিগুলি দেখি ও ছকে লিখি।

ছবি	সামতলিক চিত্র	সাধারণ ভূমি	সাধারণ ভূমির উপরের দিকের শীর্ষবিন্দুগুলি কোন রেখায় অবস্থিত ও ভূমির সঙ্গে রেখার সম্পর্ক	সিদ্ধান্ত
(ii) নং	Δ ABC ও Δ DBC	BC	BC-এর উপরের দিকের শীর্ষবিন্দু A ও D এবং AD ।। BC	Δ ABC ও Δ DBC একইভূমি BC ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগল BC ও AD-এর মধ্যে অবস্থিত।
(ii) নং			BC-এর উপরের দিকের শীর্ষবিন্দুগুলি A, E ও D এবং A, E ও D বিন্দুগুলি একই সরলরেখা AD-তে অবস্থিত এবং AD ।। BC	নিজে লিখি
(ii) নং	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি

বুঝেছি, দুটি সামাতলিক চিত্র **একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের** মধ্যে অবস্থিত বলা হবে যদি তাদের একটি সাধারণ ভূমি থাকে এবং এদের ভূমির উপরের দিকের শীর্ষবিন্দুগুলি ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।

আমার বন্ধু রিয়া আমাদের আঁকা সামতলিক চিত্রগুলি দেখে সে তার খাতায় অনেকগুলি চিত্র আঁকল।

(i)

(ii)

আমি রিয়ার আঁকা চিত্রগুলি দেখি ও কোন সামতলিক চিত্রগুলি একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত লিখি।

দেখছি,(i) নং চিত্র, Δ ABC ও Δ EBC একই ভূমি BC এবং **একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল BC এবং AE-এর মধ্যে অবস্থিত।**

কিন্তু (ii) নং চিত্রে, সামান্তরিক ABCD এবং সামান্তরিক PBCQ একই ভূমি BC-এর উপর অবস্থিত, কিন্তু একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত নয়।

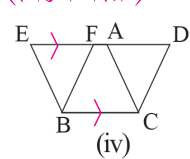
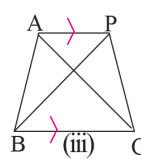
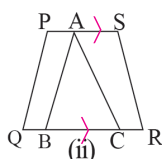
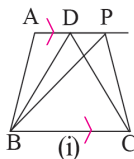
2 নীচের সামতলিক চিত্রগুলির কোন কোন সামতলিক চিত্রগুলি একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে আছে লিখি এবং সেক্ষেত্রে তাদের ভূমি ও সমান্তরাল সরলরেখাযুগল লিখি।

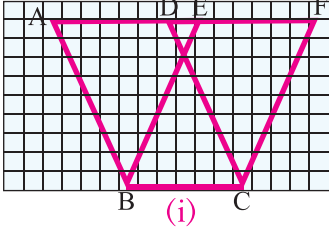
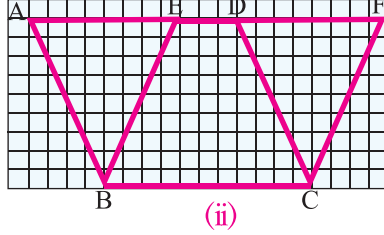
(নিজে করি)

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

হাতেকলমে

দাদা ছক কাগজে একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক আঁকল।

(i) নং ছবির সামান্তরিক আকারে ক্ষেত্র দুটির ক্ষেত্রফল (ছক কাগজের ঘর গুনে) নির্ণয় করে তুলনা করি।

ছক কাগজের ঘর গুনে দেখছি,

ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ একক (প্রায়)

EBCF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ একক (প্রায়)

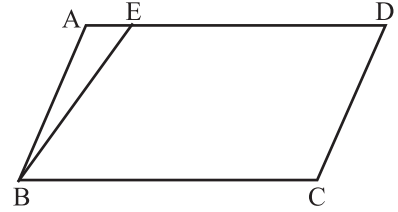
∴ ছক কাগজের ঘর গুনে পেলাম ABCD ও EBCF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রদুটির ক্ষেত্রফল সমান।

আমি একই ভাবে ছক কাগজের (ii) নং ছবির সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল পেলাম ☐ বর্গ একক। [নিজে করি]

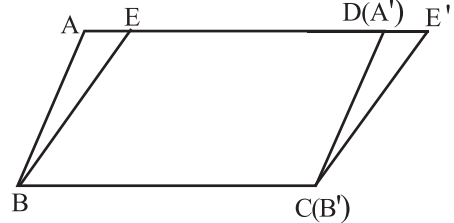
হাতেকলমে পেলাম একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

হাতেকলমে আমি ও রিয়া কিন্তু অন্যরকমভাবে হাতেকলমে যাচাই করলাম।

(i) প্রথমে একটি মোটা আর্টপেপারে একটি সামান্তরিক ABCD আঁকলাম এবং একটি সরলরেখাংশ BE অঙ্কন করলাম।

(ii) এবার ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ΔABE-এর সর্বসম একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ΔA'B'E' এঁকে কেটে নিলাম।

(iii) এবার A'B'E' ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি ABCD সামান্তরিকের সঙ্গে পাশের ছবির মতো এমনভাবে আটকালাম যাতে DC-এর সঙ্গে A'B' সমাপতিত হয়।

দেখছি, দুটি সামান্তরিক ABCD ও EBCE' পেলাম যাদের ভূমি BC এবং যারা BC ও AE' সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত।

A E D(A') E'
B C(B')

হাতেকলমে এদের ক্ষেত্রফল হিসাব করি

ΔABE ≅ ΔA'B'E'

∴ ΔABE = ΔA'B'E'

∴ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ΔABE-এর ক্ষেত্রফল + চতুর্ভুজ EBCD-এর ক্ষেত্রফল

= Δ A'B'E'-এর ক্ষেত্রফল + চতুর্ভুজ EBCD-এর ক্ষেত্রফল

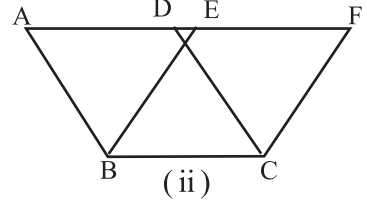
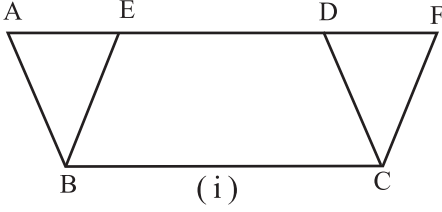
= EBCE' সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

∴ হাতেকলমে কাগজ কেটে পেলাম, একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য 23 যে সকল সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত, তাদের ক্ষেত্রফল সমান’।

(i)

(ii)

প্রদত্ত : সামান্তরিক ABCD ও সামান্তরিক EBCF একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগল BC ও AF-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = EBCF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল; অর্থাৎ, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ABCD = সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র EBCF

প্রমাণ : সামান্তরিক ABCD-এর AB || DC এবং AF ভেদক,

$\therefore$ $\angle$BAE = অনুরূপ $\angle$CDF..............(i)

আবার সামান্তরিক EBCF-এর EB || FC এবং AF ভেদক,

$\therefore$ $\angle$AEB = অনুরূপ $\angle$DFC ....(ii)

ΔABE ও ΔDCF-এর মধ্যে,

$\angle$BAE = $\angle$CDF [(i) থেকে পেলাম]

AB = DC [$\because$ ABCD সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$\angle$AEB = $\angle$DFC [(ii) থেকে পাই]

$\therefore$ ΔABC $\cong$ ΔDCF (সর্বসমতার A-S-A শর্তানুসারে)

$\therefore$ ΔABE = ΔDCF

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCF – ABE ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র = চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCF – DCF ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র
সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র EBCF = সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ABCD (প্রমাণিত)

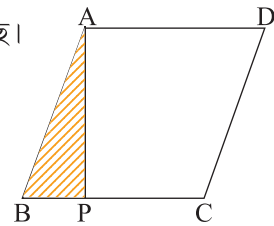
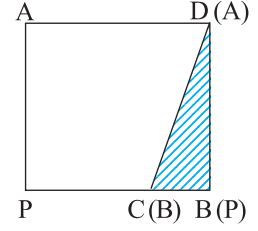
3 সজল দুটি সামান্তরিক PQRS ও MQRN এঁকেছে যাদের ভূমি QR এবং যারা একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল PN ও QR-এর মধ্যে অবস্থিত। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, সামান্তরিক PQRS আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক MQRN আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

রিয়া একটি আর্টপেপারে ABCD সামান্তরিক এঁকে কেটে নিয়েছে।

কিন্তু আমার ভাই কাগজ ভাঁজ করে

ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের A বিন্দু থেকে

BC-এর উপর AP লম্ব তৈরি করল

যা BC-কে P বিন্দুতে ছেদ করল।

আমি ABP ত্রিভুজাকারক্ষেত্র কেটে নিলাম
এবং পাশের ছবির মতো এমনভাবে আটকে দিলাম
যাতে DC বাহুর সাঙ্গে AB বাহু সমাপতিত হয়।
APBD আয়তক্ষেত্র পেলাম।

দেখছি, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র APBD-এর ক্ষেত্রফল

= দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= AD × AP

= BC × AP = ভূমি × AP

BC, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রের ভূমি। কিন্তু AP-কে সামান্তরিকের কী বলা হয়?

AP, সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD-এর **উচ্চতা**

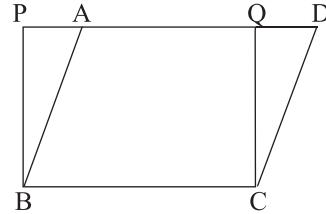
বুঝেছি, সামান্তরিকের একটি বাহুকে ভূমি ধরলে তার বিপরীত বাহুর যেকোন বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই হলো সামান্তরিকের উচ্চতা।

পেলাম, ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

আমি অন্য যে-কোনো সামান্তরিক আঁকলাম ও একইভাবে ভাঁজ করে ও কেটে নিয়ে হাতেকলমে প্রমাণ করলাম যে, সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

অনুসিদ্ধান্ত : 1 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

প্রদত্ত : ধরি ABCD একটি সামান্তরিক

প্রামাণ্য : ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

অঙ্কন : BC কে ভূমি করে BC ও AD

সমান্তরালযুগলের মধ্যে আয়তাকার চিত্র PBCQ অঙ্কন করলাম যা DA-কে এবং DA-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Q ও P বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : সামান্তরিক ABCD ও আয়তক্ষেত্রাকার চিত্র PBCQ একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরালযুগল BC ও PD-এর মধ্যে অবস্থিত।

ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র PBCQ-এর ক্ষেত্রফল

= দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= BC × PB

= ভূমি × উচ্চতা

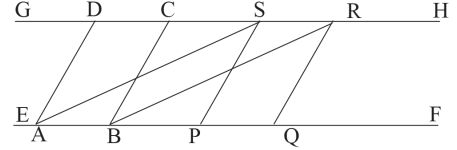
[PB, BC ভূমির সাপেক্ষে ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের উচ্চতা]

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

প্রয়োগ : 1 যে সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ভূমির দৈর্ঘ্য 10 সেমি., কিন্তু উচ্চতা 6 সেমি. তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 10 সেমি. × 6 সেমি. ☐ বর্গসেমি.। যদি সামান্তরিকের ভূমির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং উচ্চতা 8.2 সেমি. হতো, সেক্ষেত্রে সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কী হতো হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

অনুসিদ্ধান্ত : 2 রসিদ দুটি সমান্তরাল সরলরেখাংশের মধ্যে অনেকগুলি সামান্তরিক এঁকেছে যাদের ভূমির দৈর্ঘ্য সমান। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

প্রদত্ত : ABCD ও PQRS সামান্তরিক দুটি সমান সমান ভূমি AB ও PQ -এর উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাংশ EF ও GH-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন : A,S ও B,R যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : ABRS চতুর্ভুজে AB=SR (∵ PQ = SR এবং AB = PQ)

এবং AB || SR (∵ EF || GH)

∴ ABRS একটি সামান্তরিক।

ABCD ও ABRS সামান্তরিক দুটি একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল AB ও DR-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার PQRS এবং ABRS সামান্তরিক দুটি একই ভূমি SR এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাংশ যুগল SR ও AQ-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

সুতরাং ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ : 2 পৃথা AB রেখাংশের বিপরীত পার্শ্বে ABCD ও ABEF সামান্তরিক এমনভাবে এঁকেছে যে D, A ও F বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, DCEF একটি সামান্তরিক এবং ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ABEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = DCEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রদত্ত : ABCD ও ABEF সামান্তরিক দুটি AB ভূমির উপর অবস্থিত এবং ভূমি AB -এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে : (i) DCEF একটি সামান্তরিক

(ii) ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ABEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = DCEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের AB ও DC বিপরীত বাহু।

∴ AB || DC এবং AB = DC ....(i)

আবার, ABEF সামান্তরিকের AB ও FE বিপরীত বাহু।

$\therefore$ AB || FE এবং AB = FE ....(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পেলাম, DC || FE এবং DC = FE

$\therefore$ DCEF একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

সুতরাং, DF = CE

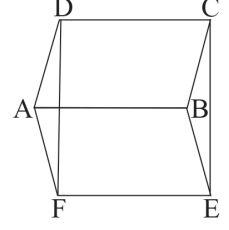
Δ ADF ও Δ BCE তে, AD = BC, AF = BE এবং DF = CE

সুতরাং Δ ADF $\cong$ ΔBCE (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে) $\therefore$ Δ ADF = Δ BCE

DAFEC বহুভুজ আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – Δ BCE

= DAFEC বহুভুজ আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – ΔADF

$\therefore$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ABEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= DCEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 3 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের চেয়ে বেশি।

প্রদত্ত : ABCD বর্গক্ষেত্র ও ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের একই ভূমি AB.

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল > ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

অঙ্কন : F বিন্দু থেকে AB -এর উপর FG লম্ব টানলাম। FG রম্বসের উচ্চতা।

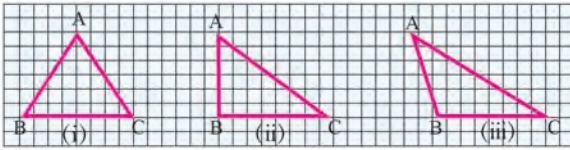
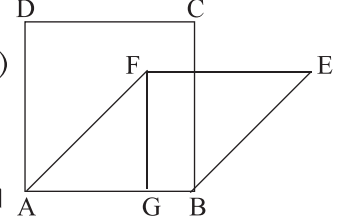
প্রমাণ : বর্গক্ষেত্র ABCD -এর ক্ষেত্রফল = AB.AB এবং ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB.FG

Δ FGA-এর, $\angle$FGA = 1 সমকোণ

$\therefore$ অতিভুজ AF > FG এবং AF = AB ($\because$ রম্বসের বাহু)

সুতরাং, AB > FG

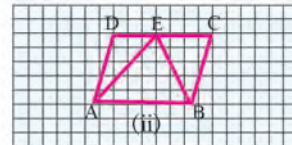
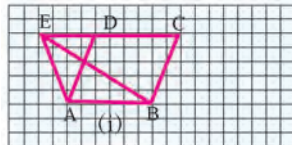
$\therefore$ AB. AB > AB.FG

$\therefore$ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল > ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আমরা যখন বিভিন্ন ধরনের সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের মধ্যে কী সম্পর্ক আছে তা কখনো হাতে কলমে, কখনো ছক কাগজে এঁকে, আবার কখনো যুক্তিসহ প্রমাণ করছিলাম, তখন আমার দাদা ও আমার বন্ধু তিথি ছক কাগজে অনেকগুলি ত্রিভুজ এঁকেছে।

আমি ছক কাগজের ঘর গুনে হাতেকলমে ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল মাপি।

ছক কাগজে ঘর গুনে দেখছি (i) নং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 21 বর্গ একক (প্রায়)

ছক কাগজের ঘর গুনে (ii) নং ও (iii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে ☐ ও ☐ পেলাম। (নিজে ঘর গুনে লিখি)

যদি একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক থাকে, সেক্ষেত্রে তাদের ক্ষেত্রফলের মধ্যে কোনো সম্পর্ক থাকবে কি? ছক কাগজে এঁকে যাচাই করি।

ছক কাগজের ঘর গুনে পেলাম,

(i) নং ছবির ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 13 বর্গ একক (প্রায়)

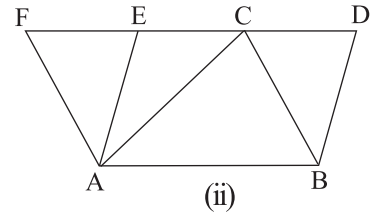
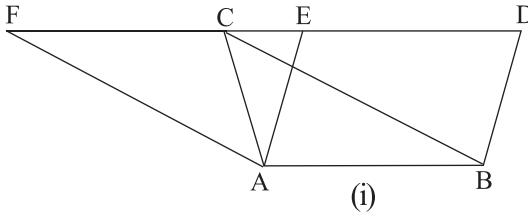
(ii) নং ছবির সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 26 বর্গ একক (প্রায়)

ছক কাগজের (ii) নং ছবির ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পেলাম ☐ বর্গ একক এবং সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ☐ বর্গ একক।

দেখছি, 'একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।' (নিজে করি)

উপপাদ্য : 24 এবার আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি, ' ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।'

(i)

(ii)

প্রদত্ত : ΔABC ও সামান্তরিক ABDE একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল AB ও CD-এর মধ্যে (i) নং ছবির ক্ষেত্রে বা AB ও ED-এর মধ্যে (ii) নং ছবির ক্ষেত্রে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABDE অর্থাৎ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABDE সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

অঙ্কন : A বিন্দুদিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা বর্ধিত DC বা DE কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ∴ ABCF চতুর্ভুজের

AB ∥ FC (প্রদত্ত)

AF ∥ BC (অঙ্কনানুসারে)

∴ ABCF একটি সামান্তরিক ।

সামান্তরিক ABDE ও সামান্তরিক ABCF একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল AB ও FD -এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ ABDE সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

আবার, সামান্তরিক ABCF -এর কর্ণ AC

$\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABCF

$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABDE

(∵ সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং দুটি সর্বসম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান)

∴ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABDE সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

B বিন্দু দিয়ে AC -এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করে উপপাদ্যটি নিজে প্রমাণ করি।

নিজে করি— 12.1

1. কোনো ত্রিভুজ ও আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।
2. কোনো ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক সমান সমান ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

রিয়া অনেকগুলি ছোটো-বড়ো রঙিন ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডের মডেল তৈরি করেছে।

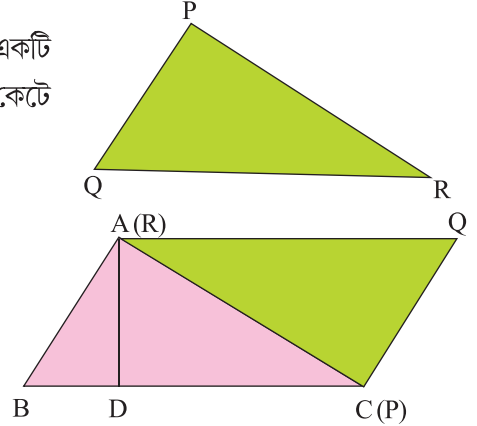
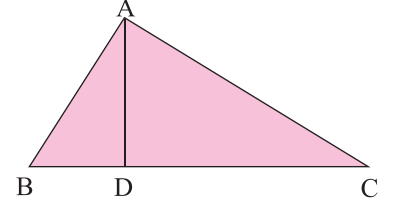
কিন্তু ছক কাগজের সাহায্য ছাড়া আমরা এই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কীভাবে নির্ণয় করব?

আমি রিয়ার আঁকা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল ছক কাগজ ছাড়া অন্য পদ্ধতিতে মাপার চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

1. প্রথমে কাগজ ভাঁজ করে (i) নং ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভূমি BC-এর উপর A বিন্দু থেকে লম্ব AD অঙ্কন করলাম যা BC -কে D বিন্দুতে ছেদ করল। অর্থাৎ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উচ্চতা AD নিলাম। A শীর্ষবিন্দু বরাবর BC বাহুকে এমনভাবে ভাঁজ করলাম, যাতে B বিন্দুটি BC বাহু বরাবর এবং BC বাহুর উপরে থাকে। ভাঁজ খুলে হাতে কলমে BC-এর উপর লম্ব পেলাম।

2. ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের আর একটি সবুজ রঙের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র PQR তৈরি করলাম ও কেটে নিলাম।

3. পাশের ছবির মতো Δ ABC ও Δ PQR একসঙ্গে একটি বড়ো পিচবোর্ডে আটকে দিলাম যাতে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AC বাহু ও PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের PR বাহু সমাপতিত হয় এবং AC বাহুর যে পাশে Q বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে B বিন্দু থাকে।

দেখছি, ABCQ একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র পেয়েছি।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ABCQ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}$ BC $\times$ AD

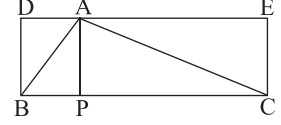
$=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা [BC বাহুর সাপেক্ষে AD উচ্চতা]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

আমি অন্য ত্রিভুজ এঁকে ও কেটে একইভাবে হাতে কলমে যাচাই করে পেলাম ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা (নিজে করি)

অনুসিদ্ধান্ত : 3 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে,কোনো ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

প্রদত্ত : ধরি ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি BC এবং $AP \perp BC$.

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AP$

অঙ্কন : BC কে ভূমি করে এমন একটি আয়তক্ষেত্র DBCE অঙ্কন করলাম যাতে D, A ও E সমরেখ হয়।

প্রমাণ : ΔABC ও আয়তক্ষেত্র DBCE একই ভূমি BC ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশ BC ও DE -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র DBCE $= \frac{1}{2} \times BC \times DB = \frac{1}{2} \times BC \times AP$ [$\because$ APBD একটি সামান্তরিক]

$= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা [AP, BC বাহুর সাপেক্ষে উচ্চতা]

প্রয়োগ: 4 রিয়ার আঁকা নীল রঙের ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য 7 সেমি., কিন্তু উচ্চতা 6 সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 7$ সেমি. $\times 6$ সেমি. $= 21$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ: 5 ABCD সামান্তরিকের ভিতর P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে, APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সামান্তরিক ABCD আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিকের ভিতর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে : APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন : P বিন্দু দিয়ে AD বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করি যা AB বাহুকে E বিন্দুতে এবং DC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : AEFD চতুর্ভুজে AD || EF এবং AE || DF ;

সুতরাং, AEFD একটি সামান্তরিক।

ΔAPD ও সামান্তরিক AEFD একই ভূমি AD ও একই সমান্তরালযুগল AD ও EF -এর মধ্যে অবস্থিত।

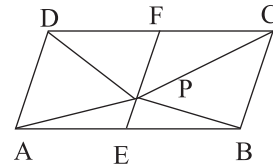
সুতরাং APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ AEFD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

ΔBPC ও সামান্তরিক BEFC একইভূমি BC ও একই সমান্তরালযুগল BC ও EF -এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ BEFC সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ (AEFD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BEFC সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল)

$= \frac{1}{2} \times$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ : 6 ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC ; BC বাহুর উপর O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে AB ও AC বাহুর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে OP এবং OQ; B বিন্দু থেকে AC বাহুর লম্ব দূরত্ব BD; প্রমাণ করি যে, OP + OQ = BD

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর O যেকোন একটি বিন্দু এবং AB = AC ; O বিন্দু থেকে OP ও OQ যথাক্রমে AB ও AC বাহুর উপর লম্ব । B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্ব BD

প্রমাণ করতে হবে যে : OP + OQ = BD.

অঙ্কন : A, O যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ AB .OP

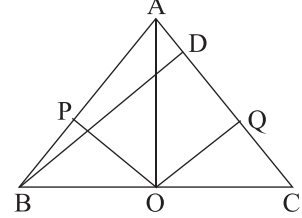
AOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ AC. OQ

AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}AB.OP + \frac{1}{2}AC.\ OQ$

ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}AC.\ OP + \frac{1}{2}AC.\ OQ$ [$\because AB = AC$]

$\frac{1}{2}AC.\ BD = \frac{1}{2}AC.\ (OP + OQ)$

$\therefore$ OP + OQ = BD (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 7 ABC সমবাহু ত্রিভুজের ভিতর O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে BC, AC এবং AB বাহুর উপর লম্ব যথাক্রমে OP, OQ এবং OR; প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজটির উচ্চতা = OP + OQ + OR.

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের ভিতর O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে OP, OQ এবং OR যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব। A বিন্দু থেকে AD, BC বাহুর উপর লম্ব। সুতরাং AD, ABC ত্রিভুজের উচ্চতা

প্রমাণ করতে হবে যে : OP + OQ + OR = AD

অঙ্কন : O, A ; O, B এবং O, C যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : BOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ BC. OP

COA ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ CA. OQ

AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$AB. OR

BOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + COA ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল +

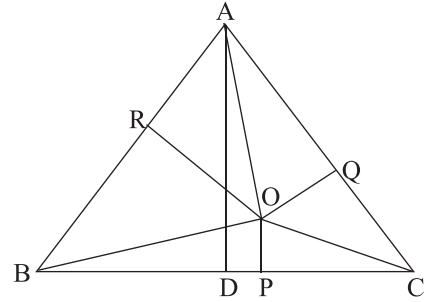
AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC.\ OP + \frac{1}{2}CA.\ OQ + \frac{1}{2}AB.OR$

ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC.\ OP + \frac{1}{2}BC.OQ + \frac{1}{2}BC.OR$

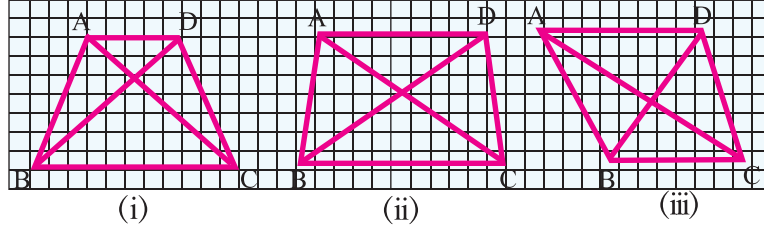
($\because$ BC = CA = AB)

$\frac{1}{2}BC.\ AD = \frac{1}{2}BC\ (OP+OQ + OR)$

$\therefore$ OP + OQ + OR = AD

সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি উচ্চতাই সমান। $\therefore$ ত্রিভুজটির উচ্চতা = OP + OQ + OR

আমি ছক কাগজে একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত দুটি ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি।

ছক কাগজের ঘর গুনে এই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল হাতেকলমে নির্ণয় করি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক জানার চেষ্টা করি।

(i) (ii) (iii)

ছক কাগজে (i) নং ছবির ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 35 বর্গ একক (প্রায়)

আবার, DBC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 35 বর্গ একক [প্রায়]

$\therefore$ হাতে কলমে পেলাম, $\Delta ABC = \Delta DBC$

(ii) নং ও (iii) নং ছবির ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হাতেকলমে ছক কাগজের ঘর গুনে দেখছি
$\Delta ABC = \Delta DBC$ [নিজে করি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

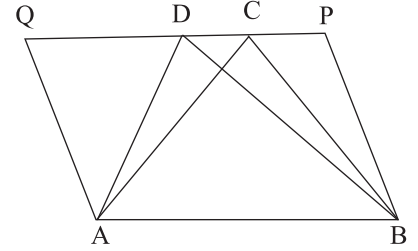
যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 25 একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল সমান'

প্রদত্ত: ΔABC ও ΔABD একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল AB ও DC-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \Delta ABD$

অঙ্কন: AB-কে ভূমি করে এবং AB ও DC সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে ABPQ একটি সামান্তরিক অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও সামান্তরিক ABPQ একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল AB ও PQ -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore\ \Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABPQ

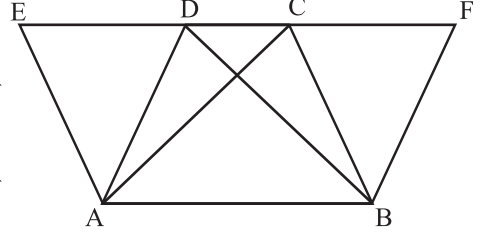
অনুরূপে, $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABPQ

$\therefore \Delta ABC = \Delta ABD$ [প্রমাণিত]

আমি অন্যভাবে প্রমাণ করি

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔABD একইভূমি AB এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল AB ও CD-এর মধ্যে অবস্থিত

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \Delta ABD$

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা বর্ধিত CD-কে E বিন্দুতে ছেদ করল । আবার B বিন্দু দিয়ে AD-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা বর্ধিত DC-কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : চতুর্ভুজ ABCE-এর AB || EC [$\because$ AB || CD প্রদত্ত] এবং AE || BC [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ ABCE একটি সামান্তরিক

অনুরূপে, ABFD ও একটি সামান্তরিক ।

আবার, সামান্তরিক ABCE ও সামান্তরিক ABFD একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল AB ও EF -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ সামান্তরিক ABCE আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক ABFD আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

আবার, সামান্তরিক ABCE-এর কর্ণ AC

$\therefore$ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABCE

অনুরূপে $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABFD

$\therefore$ $\Delta ABC = \Delta ABD$ [$\because$ সামান্তরিক ABCE = সামান্তরিক ABFD] [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত : 4 প্রমাণ করি যে, সমান সমান দৈর্ঘ্যের ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

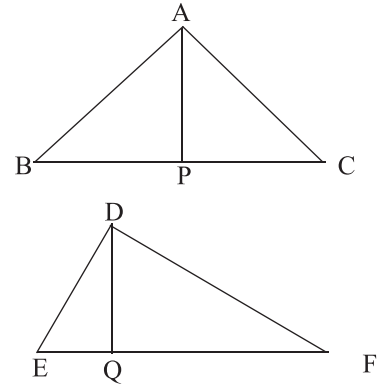
প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF এর ভূমির দৈর্ঘ্য BC ও EF সমান। অর্থাৎ, BC = EF: AP, BC বাহুর উপর লম্ব এবং DQ, EF বাহুর উপর লম্ব। অর্থাৎ AP ও DQ যথাক্রমে ΔABC ও ΔDEF- এর BC ও EF ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা এবং AP = DQ

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \Delta DEF$

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} BC \,.\, AP$

DEF ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} EF \,.\, DQ$

$= \frac{1}{2} BC \,.\, AP$ ($\because$ EF = BC এবং AP = DQ)

$\therefore$ $\Delta ABC = \Delta DEF$ [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত : 5 প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটিকে দুটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে,

প্রদত্ত : ΔABC-এর AD মধ্যমা। অর্থাৎ, BD = DC

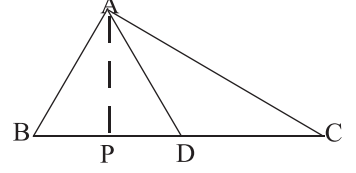
প্রমাণ করতে হবে যে : ABD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ACD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC ভূমির উপর AP লম্ব টানলাম

প্রমাণ : ABD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BD.\ AP.$

ADC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}DC.\ AP.$

$= \frac{1}{2}BD\ .\ AP\ (\because BD = DC)$

$\therefore$ ABD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ADC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 8 ΔABC-এর AD মধ্যমার উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে, $\Delta ABP = \Delta ACP$

প্রদত্ত : ΔABC-এর AD মধ্যমার উপর P যে-কোন একটি বিন্দু।

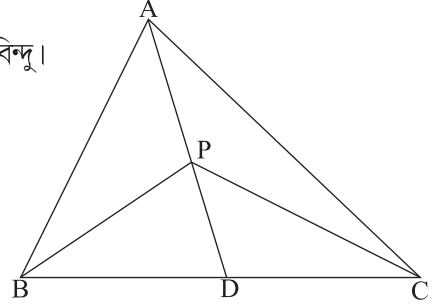
প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABP = \Delta ACP$

প্রমাণ : ΔABC-এর AD মধ্যমা।

$\therefore\ \Delta ABD = \Delta ACD$ ———(i)

আবার, ΔBPC-এর PD মধ্যমা।

$\therefore\ \Delta BPD = \Delta CPD$ ———(ii)

(i)-(ii) করে পাই, $\Delta ABD - \Delta BPD = \Delta ACD - \Delta CPD$ $\therefore\ \Delta ABP = \Delta ACP$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 9 প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের দুটি কর্ণ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের AC ও BD কর্ণ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta AOD$

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের AC ও BD কর্ণদুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ AO = OC এবং BO = OD [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ΔABC-এর BO মধ্যমা,

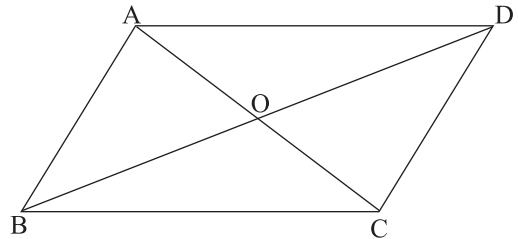
$\therefore\ \Delta AOB = \Delta BOC$ ——(i)

ΔBCD-এর CO মধ্যমা,

$\therefore\ \Delta BOC = \Delta COD$ ——(ii)

ΔACD-এর DO মধ্যমা,

$\therefore\ \Delta COD = \Delta AOD$ ——(iii)

(i), (ii) ও (iii) থেকে পেলাম, $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta AOD$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 10 ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E হলে, প্রমাণ করি যে, $\Delta BED = \frac{1}{4}\Delta ABC$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 11 ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের AB || DC এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে $\Delta AOD = \Delta BOC$

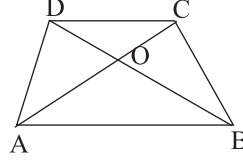
প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের AB || DC এবং AC ও BD কর্ণ পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta AOD = \Delta BOC$

প্রমাণ : ΔADB ও ΔACB একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল AB ও DC-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta ADB = \Delta ACB$

$\Delta ADB - \Delta AOB = \Delta ACD - \Delta AOB$

$\therefore \Delta AOD = \Delta BOC$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ 12 ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AB, BC, ও CA বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E, ও F; প্রমাণ করি যে, $\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AB , BC ও CA বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E ও F

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AB ও AC -এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও F;

$\therefore$ DF || BC বা, DF || BE

আবার, ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AC ও BC -এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E

$\therefore$ FE || AB বা, FE || DB

পেলাম, BDFE চতুর্ভুর্জের DF || BE এবং BD || EF

$\therefore$ BDFE একটি সামান্তরিক এবং DE কর্ণ।

$\therefore \Delta DBE \cong \Delta DEF$

$\therefore \Delta DBE = \Delta DEF$ ....(i)

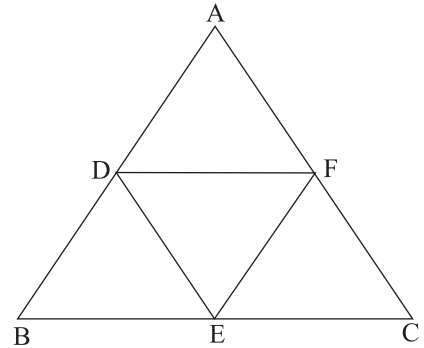
একইভাবে পাই, $\Delta CEF = \Delta DEF$............ (ii)

এবং $\Delta ADF = \Delta DEF$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) থেকে পেলাম,

$\Delta DEF = \Delta DBE = \Delta ADF = \Delta CEF$

$\therefore 4\Delta DEF = \Delta ABC$

$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$ (প্রমাণিত)

আমরা যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি আবার হাতেকলমে যাচাই করে দেখেছি যে; 'একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হবে'।

কিন্তু যদি একই ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজাকারক্ষেত্রের ভূমি একই হয় এবং তারা যদি ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হয় তবে কি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র দুটি একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে? অর্থাৎ ☐ নং উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব? যুক্তি দিয়ে প্রমাণের চেষ্টা করি।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 26 ‘সমান সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলি একই ভূমির উপর এবং ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে, তারা একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।’

প্রদত্ত : ABC ও ADC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা একই ভূমি AC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। B , D যোগ করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে : AC || BD

অঙ্কন : B ও D বিন্দু থেকে AC -এর উপর BP ও DQ দুটি লম্ব অঙ্কন করলাম যারা AC বা AC-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : $\Delta ABC = \frac{1}{2} AC.BP$ [AC ভূমি এবং BP উচ্চতা]

$\Delta ADC = \frac{1}{2} AC.DQ$ [AC ভূমি এবং DQ উচ্চতা]

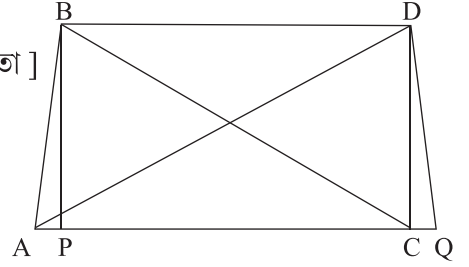
যেহেতু, $\Delta ABC = \Delta ADC$

$\therefore \frac{1}{2} AC.BP = \frac{1}{2} AC.DQ$

সুতরাং, BP = DQ

আবার, BP || DQ (একই সরলরেখাংশের উপর লম্ব)

∴ BPQD একটি সামান্তরিক।

সুতরাং, PQ || BD; অর্থাৎ, AC || BD (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 13 ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের AC ও BD কর্ণদুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\Delta AOD = \Delta BOC$; প্রমাণ করি যে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র।

প্রদত্ত: ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের AC ও BD কর্ণদুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\Delta AOD = \Delta BOC$

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র।

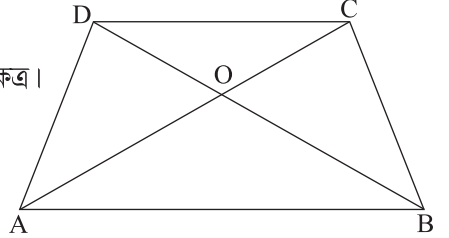
প্রমাণ: $\Delta AOD = \Delta BOC$

$\therefore \Delta AOB + \Delta AOD = \Delta AOB + \Delta BOC$

$\therefore \Delta ABD = \Delta ABC$

সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ABD ও ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রদুটি একই ভূমি AB -এর উপরে এবং AB -এর একইপার্শ্বে অবস্থিত।

∴ ABD ও ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রদুটি একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে থাকবে। অর্থাৎ AB || DC

ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের AB || DC ; সুতরাং, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র।

প্রয়োগ : 14 ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AB ও AC বাহুর উপর দুটি বিন্দু D ও E এমনভাবে অবস্থিত যাতে $\Delta DBC = \Delta EBC$ হয়। প্রমাণ করি যে, DE || BC [নিজে করি]

প্রয়োগ : 15 প্রমাণ করি যে, যদি একটি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণ চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে তবে চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র হবে।

প্রদত্ত : ABCD একটি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র। এর প্রত্যেকটি কর্ণ AC ও BD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটিকে প্রতি ক্ষেত্রে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

প্রমাণ : $\Delta ABC = \Delta ACD = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABCD $= \Delta ABD = \Delta BCD$

$\therefore \Delta ABC = \Delta ABD$

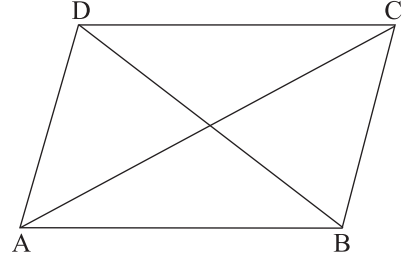
এরা একই ভূমি AB-এর উপর এবং AB-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

$\therefore AB \,||\, DC$

অনুরূপে, $\Delta ABC = \Delta DBC$

এরা একই ভূমি BC -এর উপর এবং BC -এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

$\therefore AD \,||\, BC$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

প্রয়োগ : 16 প্রমাণ করি যে, একটি ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের তির্যক বাহু দুটির মধ্যবিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাংশ সমান্তরাল বাহু দুটির সমান্তরাল।

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের AD || BC; তির্যক বাহুদ্বয় AB ও DC -এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q; P ও Q যোগ করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে : PQ সরলরেখাংশ AD ও BC -এর সমান্তরাল।

অঙ্কন : AC, PC, BD ও BQ যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDBC একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল BC ও AD -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta\, ABC = \Delta\, BDC$

আবার AB -এর মধ্যবিন্দু P,

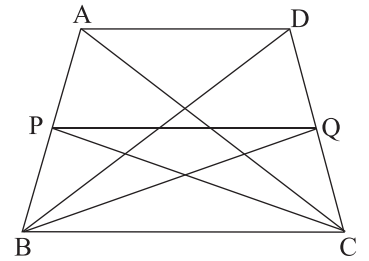
$\therefore \Delta\, BPC = \frac{1}{2} \Delta\, ABC$

অনুরূপে, $\Delta\, BQC = \frac{1}{2} \Delta\, BDC$ [DC -এর মধ্যবিন্দু Q]

$\therefore \Delta\, BPC = \Delta\, BQC$

এবং এরা BC -এর উপর একইদিকে অবস্থিত।

$\therefore PQ \,||\, BC$

যেহেতু AD || BC, সুতরাং, PQ, BC ও AD উভয়ের সঙ্গেই সমান্তরাল।

কষে দেখি— 12

1. ABCD সামান্তরিকের AB এবং DC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q; প্রমাণ করি যে, APCQ চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
2. ABCD রম্বসের AB এবং DC বাহুর মধ্যে দূরত্ব PQ এবং AD ও BC বাহুর মধ্যে দূরত্ব RS ; প্রমাণ করি যে, PQ = RS
3. ABCD সামান্তরিকের AB এবং DC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q; প্রমাণ করি যে, PBQD একটি সামান্তরিক এবং Δ PBC $= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক PBQD.
4. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC এবং বর্ধিত BC বাহুর উপর P যেকোন একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে AB এবং AC বাহুর উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব। B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্ব BS; প্রমাণ করি যে, PQ –PR = BS.
5. ABC সমবাহু ত্রিভুজের বাইরে এবং ABC কৌণিক অঞ্চলের মধ্যে O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে AB, BC এবং CA বাহুর উপর লম্ব যথাক্রমে OP, OQ এবং OR ; প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজটির উচ্চতা = OP + OQ –OR .
6. ABCD সামান্তরিকের AB বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AD, AC এবং BC -কে বা তাদের বর্ধিত অংশকে যথাক্রমে E, F ও G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, Δ AEG = Δ AFD.
7. ABCD সামান্তরিকের DC বাহুর উপর E যেকোনো একটি বিন্দু। বর্ধিত AE, বর্ধিত BC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। D, F যুক্ত করা হলো। প্রমাণ করি যে (i)Δ ADF = Δ ABE. (ii)Δ DEF = Δ BEC
8. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ABC এবং ABD দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র AB বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, AB, CD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
9. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; CDEF সামান্তরিকটি BC বাহু এবং A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, Δ ABC = সামান্তরিক CDEF.
10. ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণের উপর P যেকোন একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে, Δ APD = ΔCPD.
11. ABC ত্রিভুজের AD এবং BE মধ্যমা। প্রমাণ করি যে, Δ ACD = Δ BCE
12. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB এবং AC বাহুকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। CP এবং BQ পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে,
    (i) Δ BPQ = Δ CPQ (ii) Δ BCP = Δ BCQ (iii) Δ ACP = Δ ABQ (iv) Δ BXP=ΔCXQ
13. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং BC বাহুর উপর P যেকোন একটি বিন্দু। P, A যুক্ত করি। D বিন্দু দিয়ে PA সরলরেখাংশের সমান্তরাল সরলরেখা AB বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ করি যে (i) Δ ADQ = Δ PDQ (ii) Δ BPQ $= \frac{1}{2}$ Δ ABC .
14. ABC ত্রিভুজে AB = AC; B ও C বিন্দু থেকে AB ও AC বাহুর উপর লম্ব যথাক্রমে AC ও AB বাহুকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, FE || BC
15. ABC ত্রিভুজে $\angle$ABC = $\angle$ACB ; $\angle$ABC ও $\angle$ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় AC এবং AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, FE || BC
16. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ABCD ও AEFG সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র দুটির $\angle$A সাধারণ এবং E, AB বাহুর উপর অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, DE || FC
17. ABCD একটি সামান্তরিক এবং ABCE একটি চতুর্ভুজ। AC কর্ণ ABCE চতুর্ভুজ আকারের ক্ষেত্রটিকে দুটি সমান অংশে বিভক্ত করে। প্রমাণ করি যে, AC || DE
18. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; P এবং Q যথাক্রমে BC ও BA বাহুর উপর এমনভাবে অবস্থিত যে, Δ BPQ $= \frac{1}{2}$ Δ ABC; প্রমাণ করি যে , DQ || PA.

19. ABCD সামান্তরিকের AB , BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E , F, G ও H; প্রমাণ করি যে,

(i) EFGH একটি সামান্তরিক

(ii) EFGH সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

20. ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু E; প্রমাণ করি যে, AED ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

21. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) ΔABC এর BC, CA, এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F; যদি ΔABC = 16 বর্গ সেমি. হয় তাহলে FBCE ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(a) 40 বর্গ সেমি. (b) 8 বর্গ সেমি. (c) 12 বর্গ সেমি. (d) 100 বর্গ সেমি.

(ii) A, B, C, D যথাক্রমে PQRS সামান্তরিকের PQ, QR, RS, SP বাহুর মধ্যবিন্দু। PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 36 বর্গ সেমি. হলে, ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(a) 24 বর্গ সেমি. (b) 18 বর্গ সেমি. (c) 30 বর্গ সেমি. (d) 36 বর্গ সেমি.

(iii) ABCD সামান্তরিকের ভিতর O যে কোন একটি বিন্দু। ΔAOB + ΔCOD = 16 বর্গ সেমি. হলে, ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(a) 8 বর্গ সেমি. (b) 4 বর্গ সেমি. (c) 32 বর্গ সেমি. (d) 64 বর্গ সেমি.

(iv) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D, BD বাহুর মধ্যবিন্দু E এবং AE-এর মধ্যবিন্দু O; BOE ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(a) $\frac{1}{3}$ × ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (b) $\frac{1}{4}$ × ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(c) $\frac{1}{6}$ × ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (d) $\frac{1}{8}$ × ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(v) একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র, একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত এবং তাদের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে P, R ও T হলে,

(a) P = R = 2 T (b) $P = R = \frac{T}{2}$ (c) 2P = 2R = T (d) P = R = T

22. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) ABCD সামান্তরিকের D বিন্দু থেকে AB বাহুর উপর লম্ব DE এবং B বিন্দু থেকে AD বাহুর উপর লম্ব BF; AB = 10 সেমি., AD = 8 সেমি. এবং DE = 6 সেমি. হলে, BF-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ একক; BC বাহুর মধ্যবিন্দু P; ABP ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

(iii) ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা এবং AC বাহুর উপর P এমন একটি বিন্দু যাতে ΔADP -এর ক্ষেত্রফল: ΔABD -এর ক্ষেত্রফল = 2 : 3 হয়। ΔPDC-এর ক্ষেত্রফল : ΔABC-এর ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

(iv) ABDE একটি সামান্তরিক। F, ED বাহুর মধ্যবিন্দু। ABD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 20 বর্গ সেমি. হলে, AEF ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

(v) PQRS একটি সামান্তরিক। X এবং Y যথাক্রমে PQ এবং SR বাহুর মধ্যবিন্দু। কর্ণ SQ যুক্ত করি। সামান্তরিক XQRY আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল: QSR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

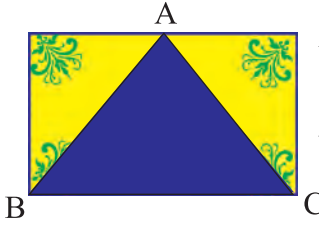
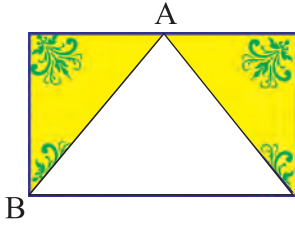
13 সম্পাদ্য : ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কন যার একটি কোণের পরিমাপ নির্দিষ্ট

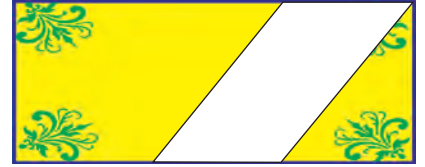
(CONSTRUCTION OF A PARALLELOGRAM WHOSE MEASUREMENT OF ONE ANGLE IS GIVEN AND EQUAL IN AREA OF A TRIANGLE)

আমার দিদি খুব ভালো চটের আসন তৈরি করতে পারে। সে অনেকগুলি আসন তৈরি করেছে।

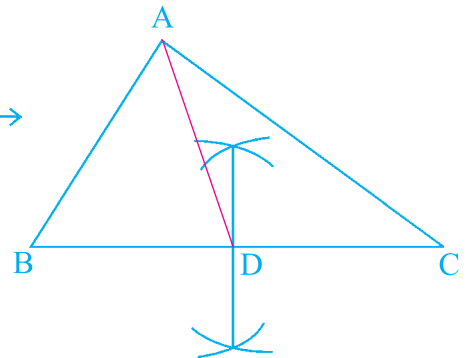
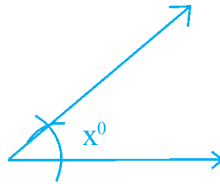
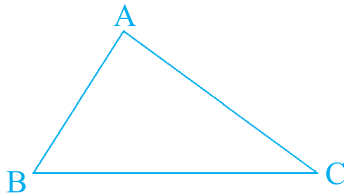
আমি ঠিক করেছি দিদির তৈরি কিছু সংখ্যক আসনে ফাঁকা জায়গায় রঙিন ভেলভেট কাপড় আটকাব ও আসনগুলি আরও সুন্দর করার চেষ্টা করব।

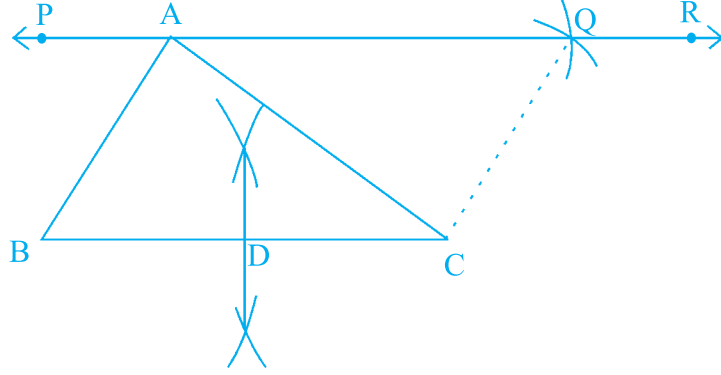
আমি দিদির তৈরি নীচের একটি আসন নিলাম —

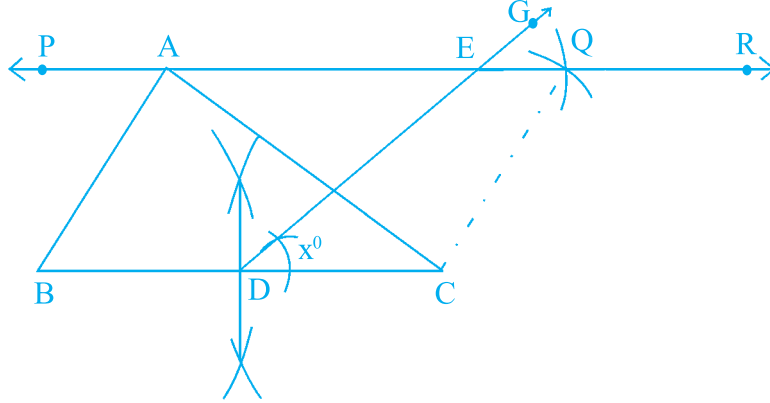
উপরের ছবির আসনটির ফাঁকা জায়গা ABC ত্রিভুজাকারক্ষেত্র

আমি এই আসনের ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের অংশে নীল রঙের ভেলভেট লাগিয়েছি ।

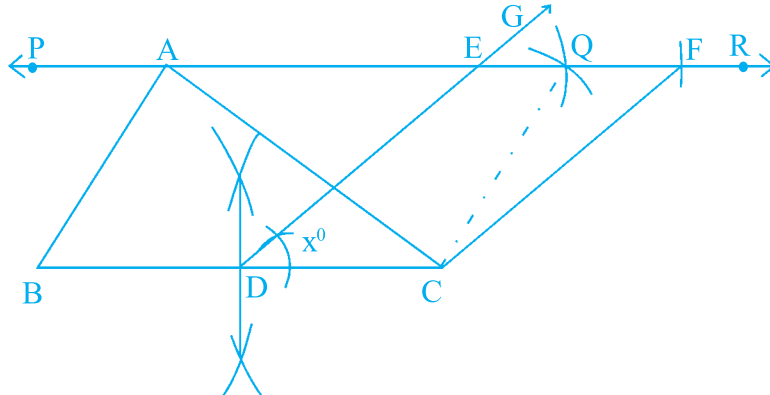
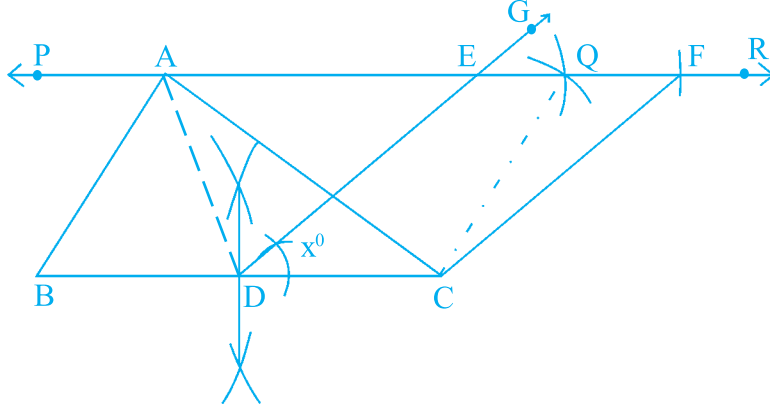
আমি আর একটি আসনে সামান্তরিক আকারের যে ভেলভেট লাগাব তার ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হবে এবং সামান্তরিকটির একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হবে।

আমরা আমাদের খাতায় প্রথমে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকব। তারপরে ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করব যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান।

1 একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ABC এবং একটি নির্দিষ্ট কোণ যার পরিমাপ x° আঁকলাম। ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁকি যার একটি কোণের পরিমাপ x°

(i) প্রথমে নির্দিষ্ট ΔABC ও নির্দিষ্ট পরিমাপের কোণ x° আঁকলাম।

(ii) এবার ΔABC-এর BC বাহুকে পেনসিল কম্পাস ও স্কেলের সাহায্যে D বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করলাম।

(iii) স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে ΔABC-এর A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা PR আঁকলাম।

[আমরা যে-কোনো সুবিধাজনক পদ্ধতিতে PR || BC আঁকতে পারি। তবে এখানে A ও C বিন্দুতে পেনসিল কম্পাস বসিয়ে যথাক্রমে BC ও AB-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। A,Q যোগ করে বাড়িয়ে দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা PR পেলাম]

(iv) ΔABC-এর BC বাহুর D বিন্দুতে x^o -এর সমান $\angle GDC$ অঙ্কন করলাম যা PR -কে E বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে DC-এর সমান করে ER থেকে EF অংশ কেটে নিলাম এবং C ও F বিন্দু দুটি যোগ করে EDCF সামান্তরিক পেলাম।

[C বিন্দু দিয়ে DE-এর সমান্তরাল CF রেখাংশ অঙ্কন করেও EDCF সামান্তরিকটি অঙ্কন করা যায়]

2 আমি যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে প্রমাণ করি যে, ΔABC-এর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক EDCF ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ: A ও D বিন্দু দুটি যোগ করলাম। চতুর্ভুজ EDCF-এর DC || EF [অঙ্কনানুসারে]

এবং DC = EF[অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ EDCF একটি সামান্তরিক।

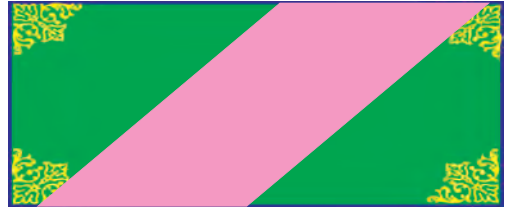
পেলাম, EDCF একটি সামান্তরিক যার $\angle EDC = x^o$

ΔADC ও সামান্তরিক EDCF একই ভূমি DC ও একই সমান্তরালযুগল DC ও AF-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta ADC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক EDCF .... (i)

আবার, ΔABC-এর AD মধ্যমা,

$\therefore \Delta ADC = \frac{1}{2} \Delta ABC$ .... (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, ΔABC = সামান্তরিক EDCF

ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র EDCF পেলাম যার $\angle EDC = \angle x^o$

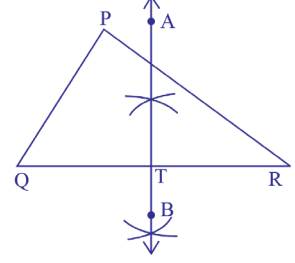
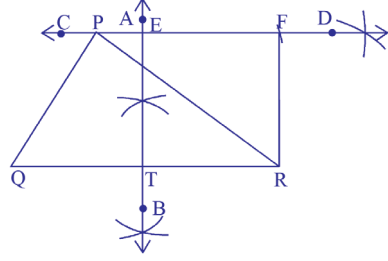
এবার বুঝলাম দিদির তৈরি আসনের ফাঁকা ত্রিভুজাকার অংশে যে ত্রিভুজাকার ভেলভেট লাগিয়েছি তার সমান ক্ষেত্রফলের সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র পেতে হলে ত্রিভুজাকার ভেলভেটটি খাতায় এঁকে তার সমান ক্ষেত্রফলের সামান্তরিক এঁকে সামান্তরিকের মাপ পাবো।

আমি 3 সেমি., 4 সেমি. ও 6 সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকি। ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র অঙ্কন করি যার একটি কোণ 30^o; অঙ্কন প্রণালী ও প্রমাণ লিখি। [নিজে করি]

সুজয় স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ PQR আঁকল।

3 আমি একই পদ্ধতিতে ΔPQR-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র অঙ্কন করি যার একটি কোণ 90°। সেক্ষেত্রে কী ধরনের চতুর্ভুজ পাব দেখি।

সুজয় স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ PQR এঁকেছে।

(i) আমি প্রথমে ΔPQR-এর QR বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক AB অঙ্কন করলাম। ওই লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটি QR বাহুকে T বিন্দুতে ছেদ করল।

(ii) এবার ΔPQR-এর P বিন্দু দিয়ে QR-এর সমান্তরাল করে CD সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AB লম্ব সমদ্বিখণ্ডককে E বিন্দুতে ছেদ করল।

(iii) এবার TR-এর সমান করে ED থেকে EF অংশ কেটে নিলাম। F ও R বিন্দু দুটি যোগ করে ETRF সামান্তরিক পেলাম যার ক্ষেত্রফল ΔPQR-এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং যার একটি কোণ $\angle ETR = 90^\circ$

আমরা ΔPQR-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র ETRF অঙ্কন করলাম।

কষে দেখি— 13

1. PQ একটি সরলরেখাংশ আঁকি যার দৈর্ঘ্য 5সেমি.। ওই সরলরেখাংশের বহিঃস্থ বিন্দু A নিলাম। A বিন্দু দিয়ে PQ সরলরেখাংশের সমান্তরাল সরলরেখা আঁকি। [তিন রকম পদ্ধতিতে আঁকি]
2. 5সেমি., 8সেমি. ও 11 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি এবং ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি যার একটি কোণ 60°; অঙ্কন প্রণালী ও প্রমাণ লিখি।
3. ΔABC অঙ্কন করি যার $AB = 6$ সেমি., $BC = 9$ সেমি., $\angle ABC = 55^\circ$; ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি যার একটি কোণ 60° এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য AC বাহুর দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।
4. ΔPQR-এর $\angle PQR = 30^\circ$, $\angle PRQ = 75^\circ$ এবং $QR = 8$ সেমি.। ΔPQR-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র আঁকি।
5. 6.5সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করি এবং ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি যার একটি কোণ 45°
6. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 8 সেমি. এবং ভূমির দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি যার একটি কোণ ত্রিভুজের সমান কোণ দুইটির একটির সমান এবং একটি বাহু সমান বাহু দুইটির একটির অর্ধেক।
   [কেবলমাত্র অঙ্কনচিহ্ন দিতে হবে]
7. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার প্রত্যেকটি সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি. এবং সমান বাহু দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ 30°; ওই ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করি।
   [কেবলমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে]

14 সম্পাদ্য : চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন

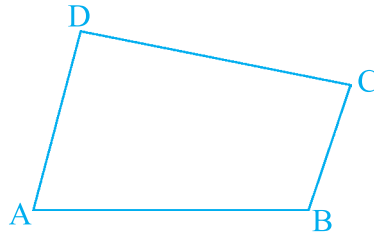
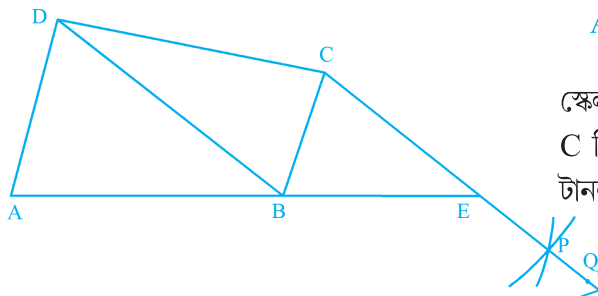
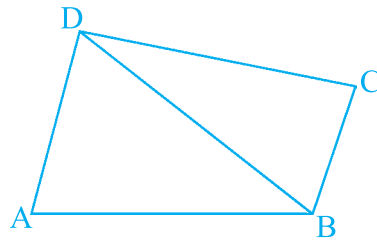
(CONSTRUCTION OF A TRIANGLE OF EQUAL AREA OF A QUADRILATERAL)

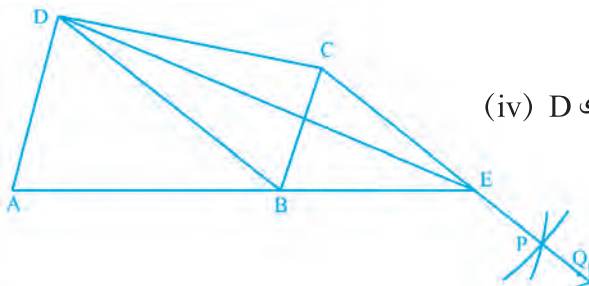
আমার দিদি কতকগুলি আসনে চতুর্ভুজাকার ভেলভেট লাগিয়েছে। আমি আমার দিদির তৈরি আসনের চতুর্ভুজাকার ভেলভেটের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকার ভেলভেট কাটব।

ওই চতুর্ভুজাকার ভেলভেটের সমান ক্ষেত্রফলের ত্রিভুজাকার ভেলভেট কীভাবে পাওয়া যায় দেখি?
খাতায় যে কোনো চতুর্ভুজ এঁকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ আঁকার চেষ্টা করি।

1 একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকি।

(i) একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ ABCD আঁকলাম।

D C A B

(ii) এবার ABCD চতুর্ভুজের DB কর্ণটি আঁকলাম।

স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে ABCD চতুর্ভুজের C বিন্দু দিয়ে DB কর্ণের সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানলাম যা বর্ধিত AB-কে E বিন্দুতে ছেদ করল।

[C বিন্দু দিয়ে যে কোনো পদ্ধতিতে DB-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানা যায়। এখানে C বিন্দুকে কেন্দ্র করে DB-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করে DC-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করল। C ও P বিন্দু দুটি যোগ করে Q বিন্দু পর্যন্ত বাড়িয়ে দিয়ে CQ ∥ DB পেলাম।]

(iv) D এবং E বিন্দু দুটি যোগ করে ADE ত্রিভুজ পেলাম।

2 যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করার চেষ্টা করি যে ΔADE-এর ক্ষেত্রফল = চতুর্ভুজ ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ: ΔDBE ও ΔDBC একই ভূমি DB -এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল DB এবং CP-এর মধ্যে অবস্থিত [যেহেতু অঙ্কনানুসারে DB || CQ]

$\therefore$ ΔDBE = ΔDBC

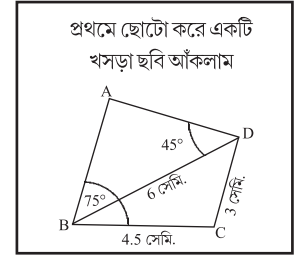
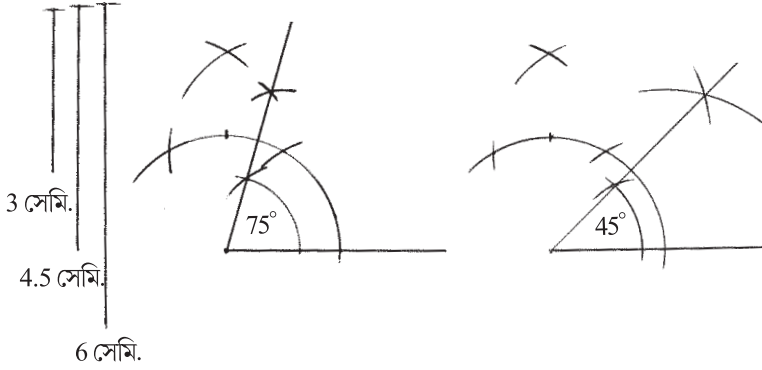
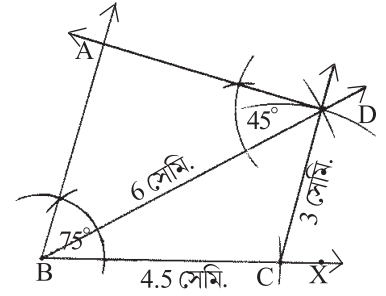
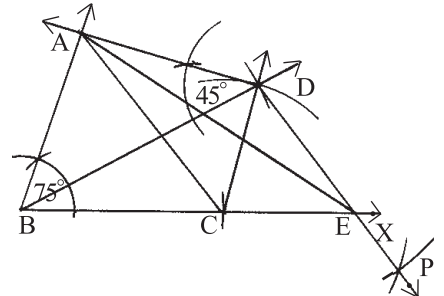
$\therefore$ ΔABD + ΔDBE = ΔABD + ΔDBC [উভয়দিকে ΔABD-এর ক্ষেত্রফল যোগ করে পাই]

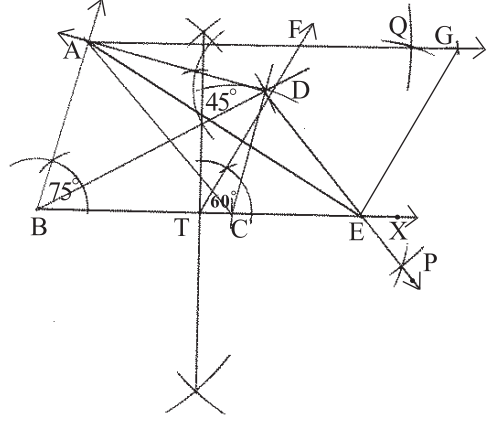
$\therefore$ ΔADE = চতুর্ভুজ ABCD

আমি এই পদ্ধতিতে যে কোনো চতুর্ভুজ ABCD ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ADE আঁকতে পারব।

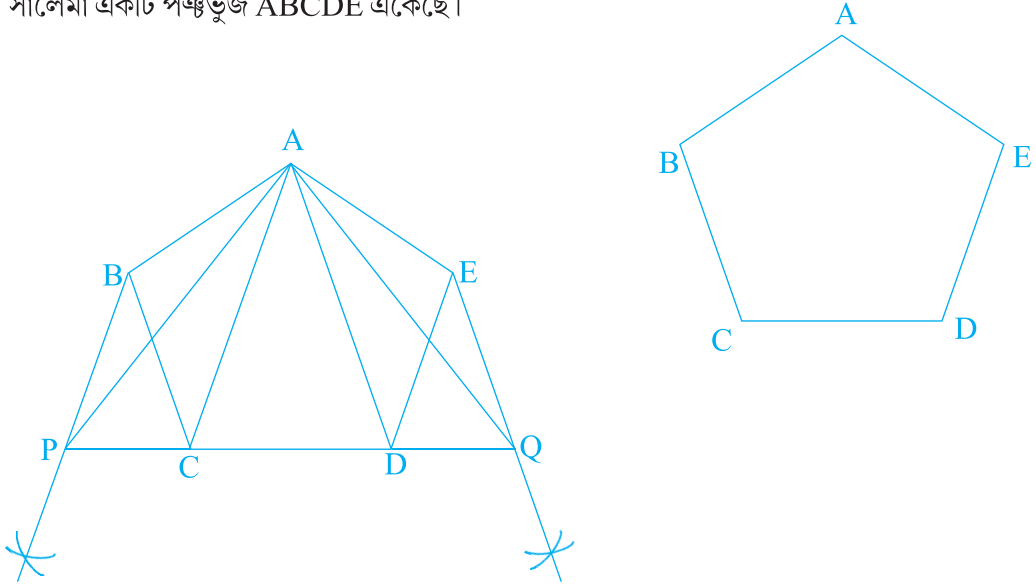
আমি আগের পদ্ধতি প্রয়োগ করে ওই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ADE-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র বা আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারব।

$\therefore$ দেখছি, এই দুটি পদ্ধতি প্রয়োগ করে আমরা যে কোনো চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র বা আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারব।

3 আমার বন্ধু জাকির একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকল যার BC = 4.5 সেমি., CD = 3 সেমি., কর্ণ BD = 6 সেমি., $\angle$ADB = 45° এবং $\angle$ABC = 75°; আমি ABCD চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি যার একটি কোণ 60°

(i) জাকির ABCD নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকল যার BC = 4.5 সেমি., CD = 3 সেমি., কর্ণ BD = 6 সেমি., $\angle$ADB = 45° এবং $\angle$ABC = 75°

(ii) আমি জাকিরের আঁকা ABCD চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট Δ ABE অঙ্কন করলাম।

(iii) এবার আমি ΔABE-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিক FTEG অঙ্কন করলাম যার একটা কোণ $\angle FTE = 60^o$।

$\therefore$ জাকিরের আঁকা ABCD নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র FTEG পেলাম যার $\angle FTE = 60^o$

4 আমি ABCD একটি চতুর্ভুজ আঁকি যার BC = 6.3 সেমি., CD = 4 সেমি., কর্ণ BD = 10সেমি., $\angle ADB = 45^o$ এবং $\angle ABC = 75^o$; চতুর্ভুজটি অঙ্কন করি এবং ABCD চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করি। [নিজে করি]

5 আমার বন্ধু সালেমা তার খাতায় ABCDE একটি পঞ্চভুজ এঁকেছে। আমি একইভাবে এই পঞ্চভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি চতুর্ভুজ এবং ত্রিভুজ আঁকার চেষ্টা করি।

(i) সালেমা একটি পঞ্চভুজ ABCDE এঁকেছে।

(ii) ABCDE পঞ্চভুজের দুটি কর্ণ AC ও AD অঙ্কন করলাম। B ও E বিন্দু দিয়ে যথাক্রমে AC ও AD-এর সমান্তরাল দুটি সরলরেখাংশ BP এবং EQ অঙ্কন করলাম যা উভয়দিকে বর্ধিত CD-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। A,P বিন্দু দুটি এবং A,Q বিন্দু দুটি যোগ করলাম।

পেলাম, (i) APDE চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ABCDE পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

(ii) APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABCDE পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

6 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে,

(i) চতুর্ভুজ APDE-এর ক্ষেত্রফল = পঞ্চভুজ ABCDE-এর ক্ষেত্রফল।

(ii) Δ APQ -এর ক্ষেত্রফল = পঞ্চভুজ ABCDE-এর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, AC || BP এবং AD || EQ

Δ ABC ও Δ APC একই ভূমি AC ও একই সমান্তরালযুগল AC ও BP-এর মধ্যে অবস্থিত

$\therefore \Delta ABC = \Delta APC$ ....(i)

Δ AED ও Δ AQD একই ভূমি AD ও একই সমান্তরালযুগল AD ও EQ -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta AED = \Delta AQD$ ....(ii)

(i) থেকে পাই, Δ ABC + চতুর্ভুজ ACDE = Δ APC + চতুর্ভুজ ACDE

$\therefore$ পঞ্চভুজ ABCDE = চতুর্ভুজ APDE

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\Delta ABC + \Delta AED = \Delta APC + \Delta AQD$

$\Delta ABC + \Delta AED + \Delta ACD = \Delta APC + \Delta AQD + \Delta ACD$ (উভয়দিকে Δ ACD যোগ করে পাই)

$\therefore$ পঞ্চভুজ ABCDE = Δ APQ [প্রমাণিত]

কষে দেখি— 14

1. প্রীতম ABCD একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করেছে যার AB = 5 সেমি., BC = 6 সেমি., CD = 4 সেমি., DA = 3 সেমি. এবং $\angle ABC = 60^\circ$; আমি এই চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি।

2. সাহানা একটি চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করেছে যার AB = 4 সেমি., BC = 5 সেমি., CD = 4.8 সেমি., DA = 4.2 সেমি. এবং কর্ণ AC = 6 সেমি.। চতুর্ভুজটির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি।

3. সাহানা একটি আয়তক্ষেত্র ABCD এঁকেছে যার AB = 4 সেমি. ও BC = 6 সেমি.। এই ABCD আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি।

4. একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকি যার BC = 6 সেমি., AB = 4 সেমি., CD = 3 সেমি., $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = 55^\circ$; এই ABCD চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার একটি বাহু AB এবং অপর একটি বাহু BC বাহু বরাবর থাকবে।

5. 5 সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। এই বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি যার একটি কোণ 60°

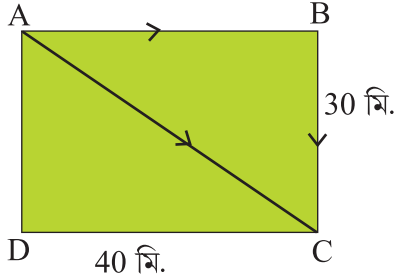
6. 6 সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি এবং এই বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি।

7. একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকি যার AB বাহুর উপর AD ও BC লম্ব এবং AB = 5 সেমি., AD = 7 সেমি. ও BC = 4 সেমি.। এই চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার একটি কোণ 30°

সংকেত : ABCD চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ ABQ আঁকলাম। Δ ABQ-এর BQ-কে ভূমি ধরে একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে আরও একটি ত্রিভুজ আঁকলাম যার একটি কোণ 30°

8. ABCDE যে কোনো একটি পঞ্চভুজ অঙ্কন করি ও তার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার একটি শীর্ষবিন্দু C

15 ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল
(AREA & PERIMETER OF TRIANGLE & QUADRILATERAL)

আজ আমি ও তনয়া আয়তক্ষেত্রাকার ABCD মাঠের A বিন্দু থেকে হাঁটতে শুরু করে আলাদা পথে C বিন্দুতে পৌঁছাব ও দেখব কে কতটা হেঁটেছি।

আমি A বিন্দু থেকে হাঁটা শুরু করে মাঠের ধার বরাবর হেঁটে C বিন্দুতে পৌঁছালাম।

মাঠের দৈর্ঘ্য AB=40 মিটার এবং প্রস্থ BC=30 মিটার।

$\therefore$ আমি মোট দূরত্ব গেলাম AB + BC = ☐ মি.

1 তনয়া A থেকে হাঁটা শুরু করে কর্ণ AC বরাবর হেঁটে C বিন্দুতে পৌঁছাল। হিসাব করে দেখি তনয়া কতটা দূরত্ব অতিক্রম করল।

সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(40)^2 + (30)^2}$ মিটার

$= \sqrt{\square}$ মিটার

$= \square$ মিটার

$\therefore$ দেখছি, তনয়া আমার থেকে কম দূরত্ব হেঁটে একই জায়গায় পৌঁছেছে।

2 আমার বন্ধু আয়েশা A বিন্দু থেকে শুরু করে ABCD আয়তক্ষেত্রাকার মাঠের পরিসীমা বরাবর একবার ঘুরে আবার A বিন্দুতে এসে পৌঁছাল।

$\therefore$ আয়েশা অতিক্রম করল $2 \times$ (40 মিটার + 30 মিটার)

$= 2 \times 70$ মিটার

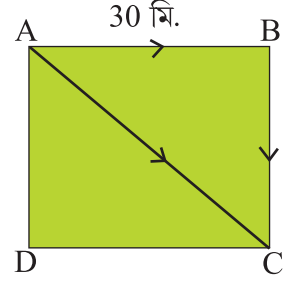
$= \square$ মিটার

যদি আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য a এবং প্রস্থ b হয়,

পরিসীমা $= 2 \times (a + b) = 2$ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$

কিন্তু আমাদের মাঠ যদি বর্গক্ষেত্রাকার হতো যার প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য 30 মিটার, সেক্ষেত্রে আমরা কে কতটা দূরত্ব অতিক্রম করতাম হিসাব করে লিখি।

আমি ABCD বর্গাকার মাঠের A বিন্দু থেকে শুরু করে ধার বরাবর C বিন্দু পর্যন্ত মোট দূরত্ব অতিক্রম করতাম ⟶ AB + BC = ☐ মিটার

3 তনয়া ABCD বর্গাকার মাঠের A বিন্দু থেকে শুরু করে AC কর্ণ বরাবর C বিন্দু পর্যন্ত মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করত হিসাব করি।

সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(30)^2 + (30)^2} \text{ মিটার} = \sqrt{1800} \text{ মিটার} = 30\sqrt{2} \text{ মিটার}$$

∴ তনয়া সেক্ষেত্রে $30\sqrt{2}$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করত।

4 আয়েশা ABCD বর্গাকার মাঠের A বিন্দু থেকে শুরু করে মাঠের ধার বরাবর চারদিকে একবার হেঁটে আবার A বিন্দুতে পৌঁছাতে মোট দূরত্ব অতিক্রম করবে,

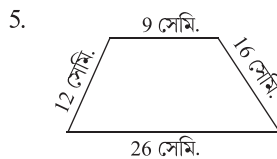
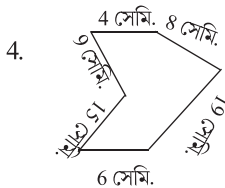
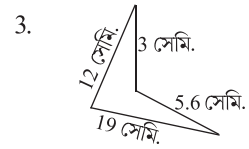
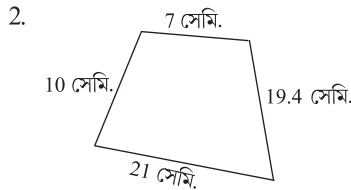
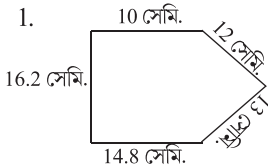
$4 \times (AB) = 4 \times 30$ মিটার $= 120$ মিটার

> যদি বর্গাকার মাঠের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a হয়,
>
> ∴ পরিসীমা $= 4a = 4 \times$ একটি বাহুর দৈর্ঘ্য
>
> এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \times$ একটি বাহুর দৈর্ঘ্য

5 আমাদের পাড়ার খেলার মাঠটি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র। যার চারটি ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার, b মিটার, c মিটার ও d মিটার।

∴ পরিসীমা বরাবর মাঠটি একবার ঘুরে আসতে অতিক্রম করতে হবে

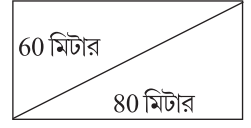
a মিটার + b মিটার + c মিটার + d মিটার =(a + b + c + d) মিটার।

নিজে করি — 15.1 আমি নীচের ছবিগুলি দেখি ও পরিসীমা লিখি

1.
2.
3.
4.
5.
6.

6 আমাদের আয়তক্ষেত্রাকার মাঠের দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। এই মাঠের কোনাকুনি একবার হাঁটলে কত পথ হাঁটব হিসাব করে লিখি।

60 মিটার
80 মিটার

আয়তকার মাঠের দৈর্ঘ্য 80 মিটার, প্রস্থ 60 মিটার

$\therefore$ আয়তাকার মাঠের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(80)^2 + (60)^2}$ মিটার $= \square$ মিটার

7 তিথিদের বর্গক্ষেত্রাকার জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য $40\sqrt{2}$ মিটার হলে, জমির একধারের দৈর্ঘ্য কত মিটার হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, তিথিদের বর্গাক্ষেত্রাকার জমির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার

ওই জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= a\sqrt{2}$ মিটার

$a\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$

$\therefore a = \dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 40$

তিথিদের বর্গাকার জমির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 40 মিটার।

8 যে বর্গাকার চিত্রে কর্ণের দৈর্ঘ্য $13\sqrt{2}$ সেমি., তার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $\square$ সেমি. [নিজে লিখি]

9 আমিনাদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির বাইরের চারদিকে 3 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 22 মিটার ও 15 মিটার। প্রতি মিটারে 16 টাকা হিসাবে রাস্তার ভিতরে ও বাইরে চারধারে বেড়া দিতে মোট কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি।

ধরি, আমিনাদের আয়তক্ষেত্রাকার জমি ABCD এবং রাস্তাসমেত জমি হলো PQRS

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রাকার জমি ABCD-এর দৈর্ঘ্য AB = 22 মিটার, প্রস্থ BC = 15 মিটার

$\therefore$ PQRS আয়তক্ষেত্রাকার জমির,

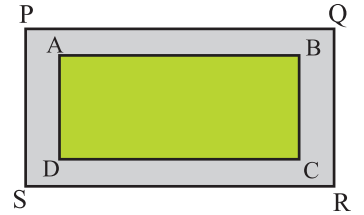
দৈর্ঘ্য PQ = 22 মি. + 2 × 3 মি. = $\square$ মিটার

এবং প্রস্থ QR = 15 মি. + 2 × 3 মি. = $\square$ মিটার

$\therefore$ ABCD-এর পরিসীমা 2 × (22 + 15) মি. = $\square$ মিটার

এবং আয়তক্ষেত্রাকার জমি PQRS-এর পরিসীমা = $\square$ মিটার

$\therefore$ মোট বেড়া দিতে হবে = $\square$ মিটার + $\square$ মিটার = 172 মিটার

$\therefore$ খরচ হবে = 16 × $\square$ টাকা = $\square$ টাকা

10 সায়নদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ। প্রতি মিটার 18 টাকা হিসাবে সায়নদের জমি বেড়া দিতে যদি 1152 টাকা খরচ হয়, তবে সায়নদের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।

ধরি, সায়নদের জমির প্রস্থ x মিটার। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য 3x মিটার।

আয়তাকার জমির পরিসীমা = 2 (x + 3x) মিটার = 2 × 4x মিটার = 8x মিটার

আবার জমির পরিসীমা $= \dfrac{1152}{18}$ মিটার = 64 মিটার

শর্তানুসারে, 8x = 64

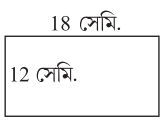
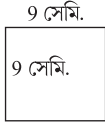
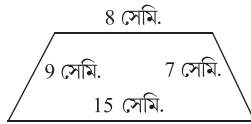
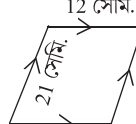
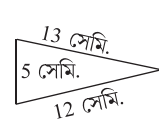
$\therefore$ x = $\square$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য = $\square$ মি., প্রস্থ = $\square$ মি.

নিজে করি — 15.2

(1) যে বর্গক্ষেত্রাকার জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য $20\sqrt{2}$ মিটার, তার চারধারে পাঁচিল দিয়ে ঘিরতে কত মিটার দৈর্ঘ্যের পাঁচিল দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

(2) প্রীতমদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির বাইরের চারধারে 5 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 2.5 ডেকামিটার ও 1.7 ডেকামিটার। প্রতি মিটার 18 টাকা হিসাবে রাস্তার বাইরের চারধারে বেড়া দিয়ে ঘিরতে মোট কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি।

(3) নীচের কার্ড দেখি, পরিসীমা লিখি ও একই পরিসীমা বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি।

11 আজ আমরা অনেকগুলো আয়তাকার আর্ট পেপারের কার্ড তৈরি করব এবং সেই কার্ডে অনেক কিছু এঁকে বন্ধুদের কাছে পাঠাব। শাহিন ঠিক করেছে প্রতিটি কার্ডের পিছনের পাতা রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়বে। হিসাব করে দেখি প্রতিটি কার্ডের জন্য কতটা রঙিন কাগজ লাগবে।

দেখছি, এই কার্ডের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং প্রস্থ 8 সেমি.

এই কার্ডের জন্য রঙিন কাগজ লাগবে, 12 সেমি. × 8 সেমি. = 96 বর্গ সেমি.

[কারণ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × ☐]

রবীন যে কার্ড তৈরি করল তার দৈর্ঘ্য 14.2 সেমি. এবং প্রস্থ 9.5 সেমি.

∴ রবীনের তৈরি কার্ডের জন্য রঙিন কাগজ লাগবে ☐ × ☐ বর্গ সেমি.= ☐ বর্গ সেমি. [নিজে লিখি]

12 জাহির একটি বর্গক্ষেত্রাকার কার্ড তৈরি করল যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.4 সেমি.। কার্ডটির ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

∴ এই বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের ক্ষেত্রফল $(6.4)^2$ বর্গ সেমি. [নিজে লিখি]

= ☐ বর্গ সেমি. [নিজে লিখি]

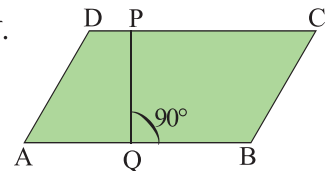
13 কিন্তু মেঘা যে কার্ড তৈরি করল সেটি আয়তক্ষেত্রাকার হলো না। কার্ডটি সামান্তরিক আকারের। সামান্তরিক আকার কার্ডের ক্ষেত্রফল কীভাবে পাব দেখি।

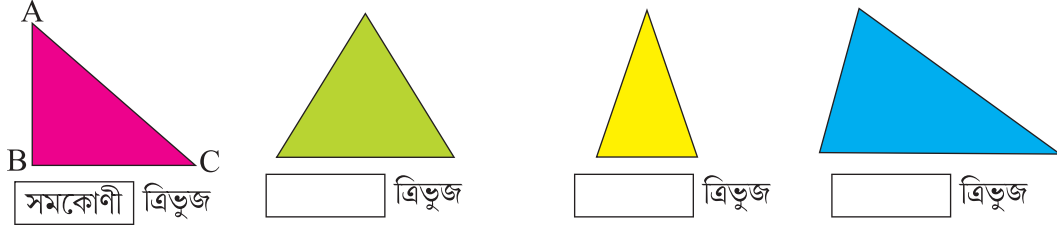
সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিকের ভূমি × সামান্তরিকের উচ্চতা।

মেঘা মেপে দেখল কার্ডটির ভূমির দৈর্ঘ্য 8 সেমি. এবং উচ্চতা 6 সেমি.

কার্ডটির ক্ষেত্রফল = 8 × 6 বর্গ সেমি. = 48 বর্গ সেমি.

(ছবিতে ABCD সামান্তরিকের ভূমি AB এবং উচ্চতা PQ)

D P C
90°
A Q B

আমার ভাই কয়েকটি বিভিন্ন ধরনের ত্রিভুজের রঙিন কাগজ কেটেছে।

সমকোণী ত্রিভুজ

☐ ত্রিভুজ

☐ ত্রিভুজ

☐ ত্রিভুজ

14 আমি ও ডেভিড এই ত্রিভুজ আকারক্ষেত্রগুলির বাহুর দৈর্ঘ্য লিখি ও এদের ক্ষেত্রফল লেখার চেষ্টা করি।

ধরি, লাল রঙের সমকোণী ত্রিভুজ ABC -এর ভূমি BC = a একক

উচ্চতা AB = b একক

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC -এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা} = \frac{1}{2} \times a \times b \text{ বর্গ একক}$$

পেলাম,

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{2}$ ab বর্গ একক।

15 আমি সবুজ রঙের সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল মাপার চেষ্টা করি।

ধরি, সবুজ রঙের সমবাহু ত্রিভুজটি হল ΔABC যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 3a একক। A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব টানি।

সুতরাং ত্রিভুজটির উচ্চতা = AD

সমকোণী ত্রিভুজ ABD -তে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

বা, $AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ (যেহেতু সমবাহু ত্রিভুজে AD লম্ব BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে)

বা, $BC^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ $(\because AB = BC)$

বা, $BC^2 - \frac{BC^2}{4} = AD^2$

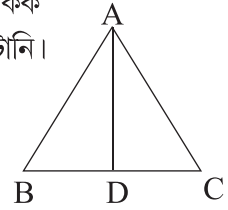
বা, $AD^2 = \frac{3BC^2}{4}$

$\therefore AD = \sqrt{\frac{3}{2}} BC$

সুতরাং, সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ একক

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \text{ বর্গ একক} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ বর্গ একক}$$

পেলাম, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{বাহু})^2$

16 যে সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি., তার ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

যে সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি., তার ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6$ বর্গ সেমি. $= 9\sqrt{3}$ বর্গ সেমি.

17 যে সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 12 সেমি., তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি (নিজে করি)।

যেকোনো সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে ওই সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা ও ওই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ করতে পারি।

18 আমি হলুদ রঙের সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল মাপার চেষ্টা করি।

ধরি, Δ ABC হল হলুদ রঙের সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি

এবং ABC-এর AB = AC = a একক

BC = b একক

সুতরাং, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = (2a + b) একক।

A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব টানি।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, সমকোণী ত্রিভুজ ABD-তে,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - (\frac{BC}{2})^2$ [যেহেতু সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উপর লম্ব টানলে লম্বটি ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

বা, $AD^2 = (a^2 - \frac{b^2}{4})$ বর্গ একক

$\therefore$ $AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ একক

$\therefore$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC -এর উচ্চতা $AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ একক

$\therefore$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times b \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ বর্গ একক

পেলাম,

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

$\frac{1}{2} \times$ ভূমির দৈর্ঘ্য $\times \sqrt{(\text{সমান বাহুর একটির দৈর্ঘ্য})^2 - (\text{ভূমির দৈর্ঘ্যের অর্ধেক})^2}$

19 একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভূমির দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, ওই ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{(10)^2 - (\frac{12}{2})^2}$ বর্গ সেমি.

$= 6 \times \sqrt{100 - 36}$ বর্গ সেমি.

$=$ ☐ বর্গ সেমি.

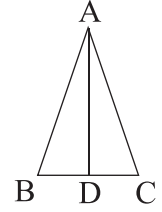
অন্যভাবে,

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC-এর, AB = AC = 10 সেমি.

এবং $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (10$ সেমি.$)^2 - (6$সেমি.$)^2 = 64$ বর্গ সেমি.

$\therefore$ উচ্চতা = AD = 8 সেমি.

$\therefore$ Δ ABC -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AD =$ ☐ বর্গ সেমি.

A
B D C

20 আমি নীল রঙের বিষমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল মাপার চেষ্টা করি।

A
a c h
B x D b – x C

ধরি, Δ ABC হল নীল রঙের বিষমবাহু ত্রিভুজটি

এবং AB = a একক, BC = b একক

এবং AC = c একক।

A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব টানি।

ধরি, উচ্চতা AD = h একক

$\therefore$ Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times b \times h$ বর্গ একক

ধরি, BD = x একক,

$\therefore$ DC = (b – x) একক

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই,

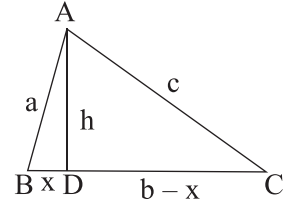
$$x^2 + h^2 = a^2$$

$$\therefore h^2 = a^2 - x^2 \text{ .... (i)}$$

আবার পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, সমকোণী ত্রিভুজ ACD থেকে পাই,

$h^2 + (b - x)^2 = c^2$

বা, $h^2 + b^2 + x^2 - 2bx = c^2$

বা, $h^2 = 2bx - b^2 - x^2 + c^2$ .... (ii)

∴ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$a^2 - x^2 = 2bx - b^2 - x^2 + c^2$

বা, $2bx = a^2 + b^2 - c^2$

∴ $x = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

আবার $h^2 = a^2 - x^2$

$= a^2 - \left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$

$= a^2 - \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}$

$= \dfrac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}$

$= \dfrac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}$

$= \dfrac{(2ab + a^2+b^2-c^2) \quad (2ab-a^2-b^2+ c^2)}{4b^2}$

$= \dfrac{\{(a+b)^2 - c^2\} \ \{c^2 - (a-b)^2\}}{4b^2} = \dfrac{(a+b+c)\,(a+b - c) \quad (c+a-b)\,(c-a+b)}{4b^2}$

ধরি, ত্রিভুজটির পরিসীমা 2s একক।

∴ ত্রিভুজটির অর্ধ পরিসীমা = s একক

সুতরাং, $2s = a+b+c$ এবং $2s - 2a = b + c - a$, $2s - 2b = a + c - b$, $2s - 2c = a + b - c$,

∴ $h^2 = \dfrac{2\,s\,(2s - 2c)\,(2s - 2b)\,(2s - 2a)}{4b^2} = \dfrac{16s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}{4b^2}$

∴ $h = \dfrac{2}{b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

∴ Δ ABC -এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times b \times h$ বর্গ একক $= \dfrac{1}{2} \times b \times \dfrac{2}{b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ বর্গ একক

ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে 'Δ' চিহ্ন দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। $\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

অর্থাৎ, যেকোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b ও c হলে,

ওই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, যেখানে অর্ধপরিসীমা $(s) = \dfrac{a+b+c}{2}$

আবার ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

ব্রহ্মগুপ্ত
598AD – 670AD

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের এই সূত্রটি মিশরের গণিতজ্ঞ হেরন দিয়েছিলেন।
তাই এই সূত্রটি **হেরনের সূত্র** (Heron's Formula) নামে পরিচিত।
এই সূত্রটি **ব্রহ্মগুপ্তের সূত্র** (Brahmagupta's Formula) নামেও পরিচিত।

হেরন
10AD – 70AD

21 আমাদের পাড়ার ত্রিভুজাকার মাঠের বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2:3:4 এবং মাঠের পরিসীমা 108 মিটার হলে, মাঠের ক্ষেত্রফল এবং বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে যথাক্রমে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ত্রিভুজাকার মাঠের বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2:3:4

সুতরাং, ত্রিভুজাকৃতি মাঠের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 2x মিটার, 3x মিটার এবং 4x মিটার। (যেখানে $x > 0$)

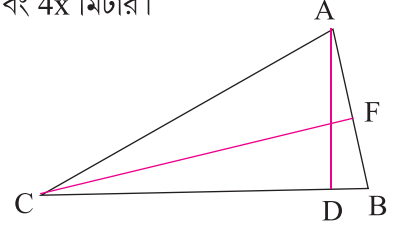
∴ ত্রিভুজাকৃতি মাঠের পরিসীমা $(2x + 3x + 4x)$ মিটার $= 9x$ মিটার

শর্তানুসারে, $9x = 108$

বা, $x = 12$

মাঠের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12×2 মিটার $= 24$ মিটার, 12×3 মিটার $= 36$ মিটার, 12×4 মিটার $= 48$ মিটার

∴ মাঠের অর্ধপরিসীমা $= \frac{108}{2}$ মিটার $= 54$ মিটার

∴ ত্রিভুজাকৃতি মাঠের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{54(54-24)(54-36)(54-48)}$ বর্গ মিটার = ☐ বর্গ মিটার

ধরি, A বিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য AD এবং ক্ষুদ্রতম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য CF।

Δ ABC -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

আবার Δ ABC -এর ক্ষেত্রফল $= 108\sqrt{15}$ বর্গমিটার

$\frac{1}{2} BC.\ AD = 108\sqrt{15}$ বর্গ মিটার

বা, $\frac{1}{2}.\ 48$ মিটার $\times AD = 108\sqrt{15}$ বর্গ মিটার

বা, $AD = \frac{108\sqrt{15}}{24}$ মিটার

∴ $AD = \frac{9\sqrt{15}}{2}$ মিটার

সুতরাং, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{9\sqrt{15}}{2}$ মিটার।

Δ ABC -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times CF$

বা, $\frac{1}{2} \times AB \times CF = 108\sqrt{15}$ বর্গ মিটার

বা, $\frac{1}{2} \times$ ☐ $\times CF = 108\sqrt{15}$ বর্গ মিটার

বা, CF = ☐

∴ CF = ☐

∴ ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে ক্ষুদ্রতম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য ☐ মিটার।

22 কিন্তু আমার বন্ধু সুমিতের পাড়ায় ত্রিভুজাকার একটি মাঠের দৈর্ঘ্য 12 মিটার, 16 মিটার ও 20 মিটার। আমি সুমিতের পাড়ার ত্রিভুজাকৃতি মাঠের ক্ষেত্রফল ও বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হিসাব করি।

অর্ধপরিসীমা $s = \frac{12+16+20}{2}$ মিটার

বা, $s = \frac{48}{2}$ মিটার $= 24$ মিটার

মাঠের ক্ষেত্রফল $(\Delta) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{24 \times 12 \times 8 \times 4}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{2 \times 12 \times 12 \times 8 \times 4}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{12 \times 12 \times 16 \times 4}$ বর্গ মিটার

$= 12 \times 4 \times 2$ বর্গ মিটার

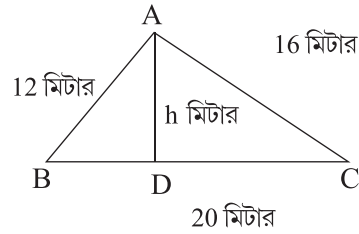
$= 96$ বর্গ মিটার

ধরি, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য h মিটার।

$\therefore$ মাঠের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 20 \times h$ বর্গ মিটার

$= 10\,h$ বর্গ মিটার

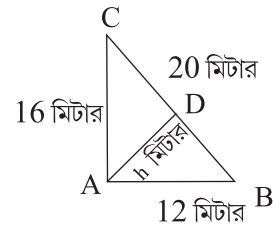
$10\,h = 96$

$\therefore h = \frac{96}{10} = 9.6$

$\therefore$ ত্রিভুজাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গ মিটার এবং বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য 9.6 মিটার।

23 সুমিত বলল আমি কিন্তু মাঠের ক্ষেত্রফল অন্যভাবে বের করেছি। আমাদের পাড়ায় ত্রিভুজাকৃতি মাঠের দৈর্ঘ্য 12 মিটার, 16 মিটার ও 20 মিটার। আমাদের পাড়ার ত্রিভুজাকৃতি মাঠটির ক্ষেত্রফল ও বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হিসাব করি।

$12^2 + 16^2 = 20^2$

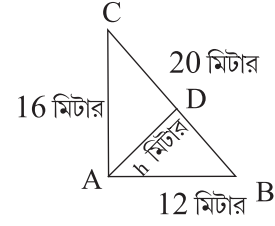
$\therefore$ ত্রিভুজাকৃতি মাঠটি সমকোণী ত্রিভুজাকার।

$\therefore$ মাঠের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16$ বর্গ মিটার $= 96$ বর্গ মিটার

ধরি, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য h মিটার

$\therefore$ মাঠের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 20 \times h$ বর্গ মিটার

$= 10\,h$ বর্গ মিটার

$10\,h = 96$

$\therefore h = \frac{96}{10} = 9.6$

$\therefore$ ত্রিভুজাকৃতি মাঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গ মিটার এবং বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য 9.6 মিটার।

24 যদি ত্রিভুজাকার মাঠের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13 মিটার, 14 মিটার ও 15 মিটার হতো, তখন ওই ত্রিভুজাকার মাঠের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে হিসাব করে লিখি।]

25 আমাদের স্কুলের একটি 32 মিটার উঁচু তালগাছ গতকাল ঝড়ে ভেঙে যাওয়ায় তার অগ্রভাগ এসে গাছটির গোড়া থেকে 8 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করেছে। গাছটি ভূমি থেকে কত উঁচুতে ভেঙেছিল আঁকি ও হিসাব করে লিখি।

ধরি, AB তালগাছটির দৈর্ঘ্য এবং C বিন্দুতে ভেঙে ভূমিকে A বিন্দুটি D বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

$\therefore$ AB = ☐ মিটার

AC = CD

$\therefore$ AB = AC + CB = CD + CB

ধরি, CB = x মিটার,

$\therefore$ AB = CD + x মিটার

বা, 32 মিটার = CD + x মিটার

$\therefore$ CD = (32 – x) মিটার

সমকোণী ত্রিভুজ CBD থেকে পাই,

$CB^2 + BD^2 = CD^2$

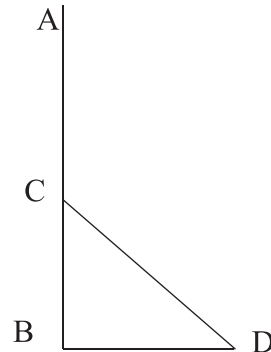
বা, $x^2 + 8^2 = (32-x)^2$

বা, $x^2 + 8^2 = (32)^2 + x^2 - 2 \times x \times 32$

বা, $2 \times x \times 32 = 32^2 - 8^2$

বা, 64x = ☐

$\therefore$ x = ☐

$\therefore$ ভূমি থেকে ☐ মিটার উপরে তালগাছটি ভেঙে গিয়েছিল।

26 কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 37 মিটার এবং সমকোণ ধারক বাহুর একটির দৈর্ঘ্য 35 মি.; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB = 35 মিটার

এবং অতিভুজ AC = 37 মিটার

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই,

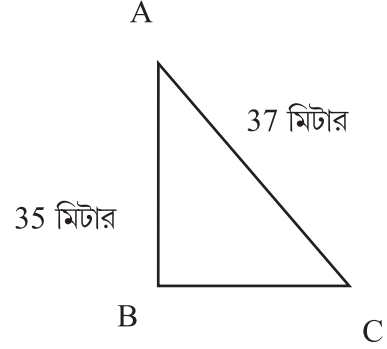
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2$

বা, $BC^2 = (37^2 - 35^2)$ বর্গ মিটার

বা, $BC^2 = (37+35)(37-35)$ বর্গ মিটার

বা, $BC^2 = 72 \times 2$ বর্গ মিটার $\quad \therefore BC = \square$ মিটার

$\therefore \quad \Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times BC \times AB$ বর্গ মিটার = $\square$ বর্গ মিটার

27 পৃথাদের গ্রামের ত্রিভুজাকৃতি উদ্যানের তিনটি ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25 মিটার, 39 মিটার ও 56 মিটার। আমরা যদি ওই উদ্যানের 56 মিটার দীর্ঘ ধারের উপর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে লম্ব বরাবর পাঁচিল দিই তাহলে পাঁচিলের দৈর্ঘ্য কী হবে এঁকে হিসাব করে লিখি।

ধরি, Δ ABC হল পৃথাদের ত্রিভুজাকৃতি মাঠ যেখানে,

AB = 25 মিটার,

AC = 39 মিটার

এবং BC = 56 মিটার

$\therefore \quad \Delta$ ABC -এর অর্ধপরিসীমা = $\square$ মিটার (নিজে হিসাব করে লিখি)

$\therefore \quad \Delta$ ABC -এর ক্ষেত্রফল = $\sqrt{60 \times (60-25) \times (60-39) \times (60-56)}$ বর্গ মিটার

= 420 বর্গ মিটার

ধরি, $AD \perp BC$ এবং AD = h মিটার

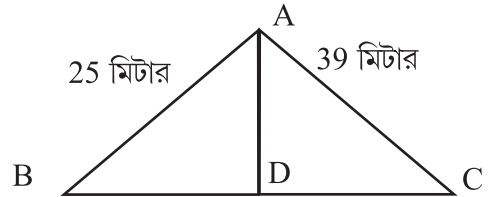
$\therefore \quad \Delta$ ABC -এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times BC \times h$ বর্গ মিটার

$= \frac{1}{2} \times 56 \times h$ বর্গ মিটার = 28 h বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, 28 h = 420

বা, $h = \frac{420}{28}$

$\therefore \quad h = \square$

$\therefore$ পাঁচিলের দৈর্ঘ্য হবে 15 মিটার।

28 আমার ভাই একটি সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি কার্ড তৈরি করেছে এবং সেই কার্ডের মধ্যে কোনো এক বিন্দু থেকে সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর তিনটি লম্ব এঁকেছে। যদি লম্ব তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সেমি., 10 সেমি. ও 11 সেমি. হয়, তাহলে এঁকে সমবাহু ত্রিভুজাকার কার্ডের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

ধরি, ABC সমবাহু ত্রিভুজাকারক্ষেত্র। AB = BC = CA = x সেমি. এবং OF = 8 সেমি., OD = 11 সেমি., OE = 10 সেমি.

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ বর্গ সেমি.

আবার, Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল

= Δ AOB -এর ক্ষেত্রফল + Δ BOC-এর ক্ষেত্রফল + Δ AOC-এর ক্ষেত্রফল

$= (\frac{1}{2} \times AB \times 8 + \frac{1}{2} \times BC \times 11 + \frac{1}{2} \times AC \times 10)$ বর্গ সেমি.

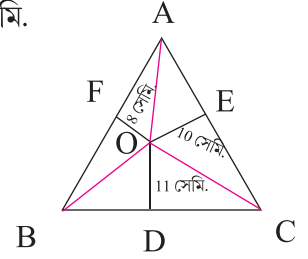
$= (4x + \frac{11}{2}x + 5x)$ বর্গ সেমি.

$= \frac{8x + 11x + 10x}{2}$ বর্গ সেমি. $= \frac{29}{2}x$ বর্গ সেমি.

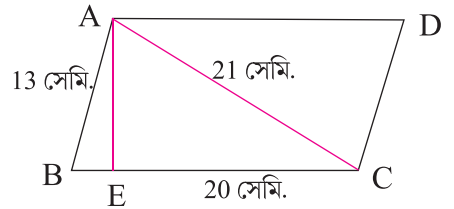
শর্তানুসারে, $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{29}{2}x$

বা $\frac{\sqrt{3}}{2}x = 29$ $\quad [\because x \neq 0]$

$\therefore \quad x = \frac{58}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{29}{2} \times \frac{58}{\sqrt{3}}$ বর্গ সেমি.$= \frac{841\sqrt{3}}{3}$ বর্গ সেমি.

29 আমি একটি সামান্তরিক এঁকেছি যার সন্নিহিত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13 সেমি. ও 20 সেমি. এবং মেপে দেখছি একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 21 সেমি.। আমি এই সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা কত হবে হিসাব করি। (20 সেমি. বাহুকে ভূমি ধরে সামান্তরিকটির উচ্চতা নির্ণয় করি)

ধরি, ABCD সামান্তরিক এঁকেছি যার

AB = 13 সেমি.,
BC = 20 সেমি.
এবং AC = 21 সেমি

$\therefore s = \frac{13 + 20 + 21}{2}$ সেমি. = ☐ সেমি.= ☐ সেমি.

ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-13)(s-20)(s-21)}$ বর্গ সেমি.

$\therefore$ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল = 2 × Δ ABC -এর ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ সেমি.

ধরি, AE $\perp$ BC এবং AE = h সেমি.

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

সুতরাং, 20 × h = ☐

$\therefore$ h = ☐ $\qquad$ $\therefore$ সামান্তরিকের উচ্চতা 12.6 সেমি.

30 তৃষা একটি চতুর্ভুজ ABCD এঁকেছে যার AB = 90 সেমি., BC = 40 সেমি, CD = 25 সেমি., DA = 16 সেমি এবং $\angle ABC = 90^0$; আমি ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

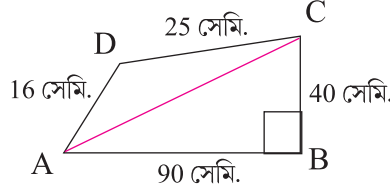
ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 9^2 + 40^2 = \square$

$\therefore$ AC = 41 সেমি.

$\therefore \Delta ABC$-এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} \times 90 \times 40$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

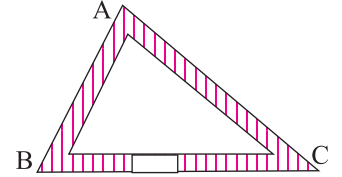
ΔADC-এর ক্ষেত্রফল $= \square$ বর্গ সেমি.

ABCD- চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল= Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল + Δ ADC -এর ক্ষেত্রফল $= \square$ বর্গ সেমি.

31 পাড়ার ত্রিভুজাকৃতি মাঠের তিনদিকের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 52 মিটার, 56 মিটার এবং 60 মিটার। প্রতি বর্গ মিটার 12 টাকা হিসাবে মাঠটি মেরামত করতে কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি। গেট তৈরির জন্য 4 মিটার ছেড়ে বাকি মাঠের ধার বরাবর বেড়া দিতে প্রতি মিটারে 25 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি।

ধরি, ABC ত্রিভুজাকৃতি মাঠ।

A
B
C

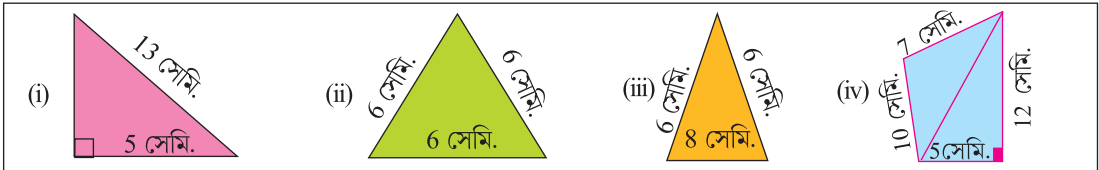
$\therefore \Delta$ ABC-এর অর্ধপরিসীমা $= \frac{52 + 56 + 60}{2}$ মিটার $= \square$ মিটার

$\therefore \Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}$ বর্গ মিটার $= \square$ বর্গ মিটার

প্রতি বর্গ মিটার 12 টাকা হিসাবে মাঠটি মেরামত করতে খরচ হবে = 1344 × 12 টাকা

$\therefore$ মাঠের বেড়ার দৈর্ঘ্য = মাঠের পরিসীমা – 4 মিটার $= \square$ মিটার

$\therefore$ মাঠে বেড়া দিতে খরচ হবে $= \square \times 25$ টাকা $= \square$ টাকা (নিজে লিখি)

নিজে করি — 15.3

1. নিচের ছবি দেখি ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

2. বোটানিক্যাল গার্ডেনের একটি সরোবরে পদ্মফুলের উপর প্রান্ত জলতল থেকে 2 সেমি. উপরে ছিল। বাতাসে চালিত হয়ে উপর প্রান্তটি পূর্বস্থান থেকে 15 সেমি. দূরে জলতলের সঙ্গে মিশে গেল। জলের গভীরতা হিসাব করে লিখি।
3. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য $12\sqrt{2}$ সেমি. হলে, ওই ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কী হবে হিসাব করে লিখি।
4. আমাদের ত্রিভুজাকার পার্কের তিন ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 65 মিটার, 70 মিটার ও 75 মিটার। বৃহত্তম ধারটি থেকে বিপরীত শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।
5. আমি ও সুজা দুটি ত্রিভুজ আঁকব যাদের উচ্চতার অনুপাত 3 : 4 এবং ওই ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4 :3; ত্রিভুজ দুটির ভূমির অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

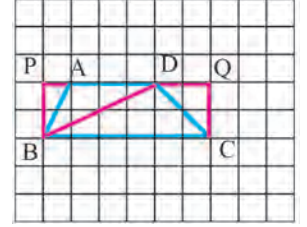
আমি একটি চতুর্ভুজ ক্ষেত্রাকার কার্ড তৈরি করলাম যার একজোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল। অর্থাৎ আমার তৈরি কার্ড ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র।

32 এই ট্রাপিজিয়াম আকারের কার্ডের ক্ষেত্রফল কীভাবে হিসাব করব? ছক কাগজের সাহায্যে এই ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করার চেষ্টা করি।

একটি ছক কাগজ তৈরি করলাম যার প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 সেমি.।

ছক কাগজের ঘর গুনে দেখছি ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ সেমি.

আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণের চেষ্টা করি।

ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD||BC এবং B ও C বিন্দু থেকে উভয়পার্শ্বে বর্ধিত AD সরলরেখাংশের উপর দুটি লম্ব BP ও CQ অঙ্কন করলাম যা উভয়পক্ষে বর্ধিত AD সরলরেখাংশকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। B ও D যোগ করলাম।

প্রমাণ : ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল

$= \Delta ABD$ -এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta DBC$ -এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times AD \times BP + \frac{1}{2} \times BC \times CQ$

$= \frac{1}{2} \times AD \times BP + \frac{1}{2} \times BC \times BP$ [$\because PQ \parallel BC, BP = CQ$]

$= \frac{1}{2} (AD + BC) \times BP$

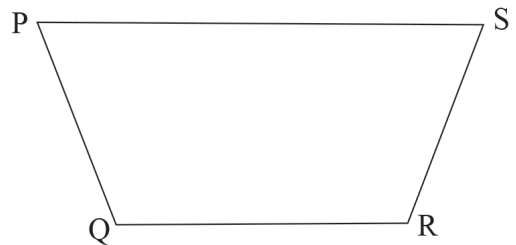
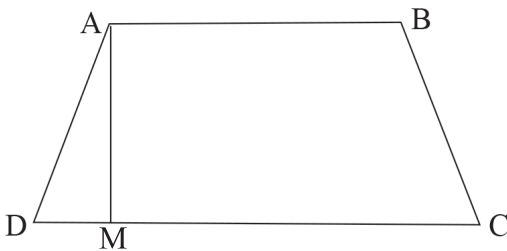
ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{2} \times$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে লম্বদূরত্ব।

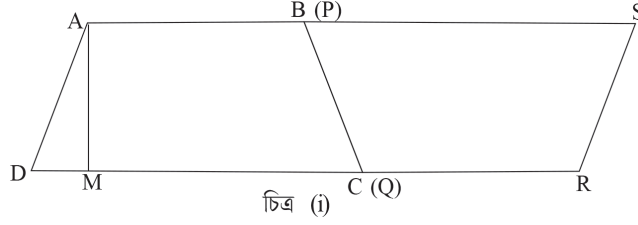
হাতেকলমে

আমি হাতেকলমে ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কীভাবে পাব দেখি।

উপকরণ : পিচবোর্ড, রঙিন আর্টপেপার, কাঁচি, আঠা, পেন ও পেনসিল।

পদ্ধতি : (1) প্রথমে একই আকারের কিন্তু আলাদা রঙিন কাগজে ট্রাপিজিয়াম এঁকে কেটে নিলাম ও ABCD ও PQRS ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র পেলাম।

ধরি, উচ্চতা AM = h

(2) একটি বড়ো পিচবোর্ডে এই দুটি রঙিন ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র ABCD ও PQRS চিত্র (i)-এর মতো আঠা দিয়ে আটকে দিলাম।

চিত্র (i)

$\therefore$ ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ASRD-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \; DR \times AM$

$= \frac{1}{2} \; (DC + CR) \times AM$

$= \frac{1}{2} \; (DC + AB) \times h \; [\therefore CR = QR = AB]$

$= \frac{1}{2} \times$ (ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে লম্ব দূরত্ব)

ট্রপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে লম্ব দূরত্ব)

33 সুনীতি আর একটি ট্রাপিজিয়াম আকারের কার্ড তৈরি করেছে যার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12.2 সেমি. ও 8.6 সেমি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব 9.8 সেমি.। আমি হিসাব করে সুনীতির তৈরি কার্ডের ক্ষেত্রফল হিসাব করার চেষ্টা করি।

ট্রাপিজিয়াম আকারের কার্ডের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ × (12.2 সেমি.+ 8.6 সেমি.) × 9.8 সেমি.

= ☐ বর্গ সেমি. (নিজে হিসাব করি)

34 যদি একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 15.3 সেমি. ও 14.7 সেমি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 7 সেমি. হয়, তবে ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। (নিজে করি)

35 তথাগত একটি রম্বস আকারের কার্ড তৈরি করেছে। এই রম্বস আকারের কার্ডের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

রম্বস একটি সামান্তরিক।

স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি, এই রম্বসের ভূমি ☐ সেমি. এবং উচ্চতা ☐ সেমি.।

এই রম্বসের ক্ষেত্রফল ☐ × ☐ বর্গ সেমি.।

অন্যভাবেও রম্বসের ক্ষেত্রফল মাপা যায় কিনা যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করার চেষ্টা করি।

প্রথমে ছক কাগজে রম্বসটি আঁকি।

ছক কাগজের প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 সেমি.।

ছক কাগজে ঘর গুনে দেখছি, রম্বস ABCD-এর ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ সেমি.

আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণের চেষ্টা করি

ABCD রম্বসের দুটি কর্ণ AC ও BD টানলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

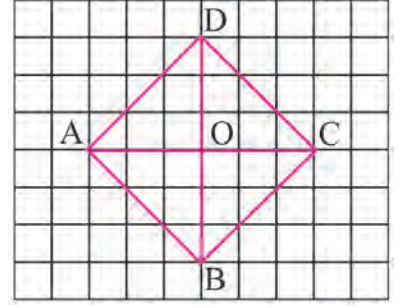
$\therefore$ ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

সুতরাং, ABCD রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \Delta$ ABD-এর ক্ষেত্রফল $+\Delta$ BCD-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times BD \times AO + \frac{1}{2} \times BD \times CO$

$= \frac{1}{2} \times BD\ (AO+CO) = \frac{1}{2} \times BD \times AC$

$= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল।

$\therefore$ রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times$ রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল

দেখছি ABCD রম্বসের AC = 6 সেমি. এবং BD = 8 সেমি.

ABCD রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

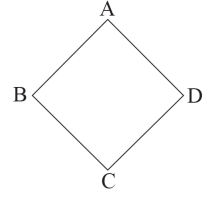
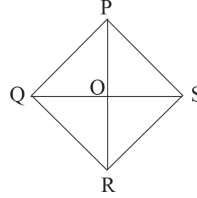
$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি.

হাতেকলমে

আমি হাতেকলমে রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল মাপার চেষ্টা করি।

উপকরণ : পিচবোর্ড, রঙিন আর্টপেপার, কাঁচি, আঠা, পেন ও পেনসিল।

পদ্ধতি : (1) প্রথমে কাগজ ভাঁজ করে বা এঁকে একটি রঙিন কাগজে ABCD রম্বস এঁকে রম্বসাকৃতি ক্ষেত্র কেটে নিলাম।

(2) এবার ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে আর একটি একই মাপের অন্য রঙের রম্বস PQRS এঁকে রম্বসাকৃতি ক্ষেত্র কেটে নিলাম।

(3) PQRS রম্বসাকৃতি ক্ষেত্রের দুটি কর্ণ PR ও QS আঁকলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল। কর্ণ বরাবর PQRS রম্বসাকৃতি ক্ষেত্র কেটে Δ POQ, Δ QOR, Δ ROS এবং ΔPOS পেলাম।

(4) একটি পিচবোর্ডে চিত্র-(1)-এর মতো আটকে দিলাম।

রম্বস ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র XYZW

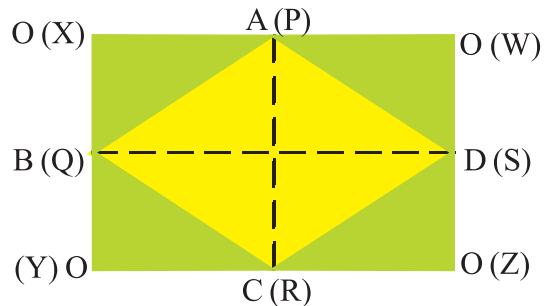
$= \frac{1}{2} \times XY \times YZ$

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times$ রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল

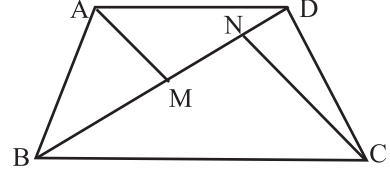
চিত্র-(1)

পেলাম,

রম্বসাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল

36 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এঁকেছি যার BD কর্ণের দৈর্ঘ্য 11 সেমি.। A ও C বিন্দু থেকে BD কর্ণের উপর দুটি লম্ব AM ও CN এঁকেছি যারা BD- কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করেছে। AM ও CN-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি. ও 11 সেমি.। ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল মাপি।

ট্রাপিজিয়াম আকার ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= Δ ABD-এর ক্ষেত্রফল + Δ BCD-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times BD \times AM + \frac{1}{2} BD \times CN = \square$ বর্গ সেমি.

37 পলাশকাকা 10 টি সমান মাপের ত্রিভুজাকৃতি টুকরো সেলাই করে একটি ছাতা তৈরি করেছেন। প্রতিটি ত্রিভুজাকৃতি টুকরোর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 50 সেমি., 20 সেমি. ও 50 সেমি.। ছাতা তৈরি করতে মোট কত পরিমাণ কাপড় লেগেছে আমি হিসাব করে লিখি।

দেখছি, প্রতিটি ত্রিভুজাকার টুকরো সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আকার ক্ষেত্র। যার সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সেমি. এবং ভূমির দৈর্ঘ্য 20 সেমি.।

∴ প্রতিটি টুকরোর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 20 \sqrt{(50)^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2}$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

∴ 10টি সবুজ রঙের টুকরোর ক্ষেত্রফল $= 10 \times 200\sqrt{6}$ বর্গ সেমি.

$= 2000\sqrt{6}$ বর্গ সেমি.

ছাতা তৈরি করতে মোট $2000\sqrt{6}$ বর্গ সেমি. পরিমাণ কাপড় লেগেছে।

38 শাকিল একটি রম্বস আকারের কার্ড তৈরি করল যার কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 16 সেমি. ও 12 সেমি.। হিসাব করে শাকিলের তৈরি রম্বস আকারের কার্ডটির ক্ষেত্রফল লিখি। (নিজে হিসাব করে লিখি)

39 মৈনাক একটি রম্বস আকারের রঙিন কার্ড তৈরি করেছে যার পরিসীমা 80 সেমি. এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 32 সেমি.। কার্ডটির অন্য কর্ণের দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ABCD রম্বসের পরিসীমা 80 সেমি.।

∴ $AB = \frac{80}{4}$ সেমি. $= \square$ সেমি.

ধরি, AC কর্ণ = 32 সেমি.

∴ AO = 16 সেমি.

$\angle AOB = 90^0$ (যেহেতু, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে)

∴ $OB^2 + OA^2 = AB^2$

সুতরাং, $OB^2 = AB^2 - AO^2$

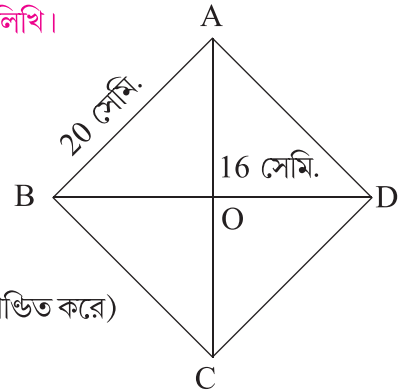
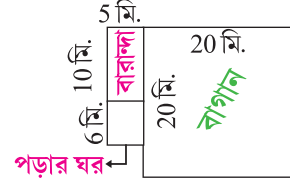
বা, $OB^2 = (20\text{সেমি.})^2 - (16\text{সেমি.})^2$

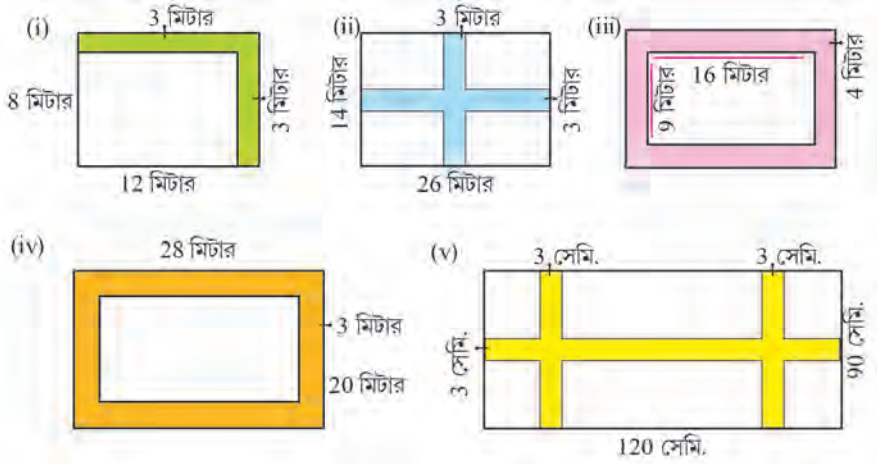
বা, $OB^2 = 144$ বর্গ সেমি.

∴ $OB = \square$ সেমি.

সুতরাং, $BD = 12 \times 2$ সেমি. $= \square$ সেমি.

∴ রম্বস ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24$ বর্গ সেমি.

$= \square$ বর্গ সেমি.

কষে দেখি— 15.1

1. আমি কামালদের বাড়ির ছবি দেখি ও উত্তর খুঁজি।
   - (i) কামালদের বাগানের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
   - (ii) প্রতি বর্গমিটারে 30 টাকা হিসাবে কামালদের বারান্দার মেঝে মেরামত করতে কত খরচ হবে হিসাব করে লিখি।
   - (iii) কামাল তার পড়ার ঘরের মেঝেতে টালি বসাতে চায়। যদি প্রতিটি টালি 25সেমি. × 25 সেমি. হয়, তবে তার পড়ার ঘরের মেঝেতে টালি বসাতে কতগুলি টালি লাগবে হিসাব করে লিখি।

2. **নীচের ছবি দেখি ও রঙিন অংশের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি**

3. বিরাটি মহাজাতি সঙ্ঘের আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3; মাঠটির চারদিকে একবার হেঁটে এলে 336 মিটার পথ অতিক্রম করা যায়। মাঠের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
4. প্রতি বর্গ মিটারে 3.50 টাকা হিসাবে সমরদের একটি বর্গাকার জমি চাষ করতে খরচ হয় 1400 টাকা। প্রতি মিটারে 8.50 টাকা হিসাবে সমরদের জমিটির চারধারে একই উচ্চতার তারের বেড়া দিতে কত খরচ হবে হিসাব করি।
5. সুহাসদের আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 500 বর্গ মিটার। জমিটির দৈর্ঘ্য 3 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 2 মিটার বাড়ালে জমিটি বর্গাকার হয়। সুহাসদের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।
6. আমাদের গ্রামে একটি বর্গাকার জমির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 300 মিটার। এই বর্গাকার জমির চারধার একই উচ্চতার 3 ডেসিমিটার চওড়া দেয়াল দিয়ে ঘিরব। হিসাব করে দেখি প্রতি 100 বর্গ মিটার জমিতে 5000 টাকা হিসাবে দেয়ালের জন্য কত খরচ পড়বে।
7. রেহানাদের আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 14 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার। বাগানটির ভিতরে চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা তৈরি করতে প্রতি বর্গ মিটারে 20 টাকা হিসাবে মোট 1380 টাকা খরচ হলে, রাস্তাটি কত চওড়া হিসাব করে লিখি।
8. 1200 বর্গসেমি. ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য 40 সেমি. হলে, তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

9. একটি হলঘরের দৈর্ঘ্য 4 মিটার, প্রস্থ 6 মিটার এবং উচ্চতা 4 মিটার। ঘরটিতে তিনটি দরজা আছে যাদের প্রত্যেকটি 1.5মি. ×1মি. এবং চারটি জানালা আছে যাদের প্রত্যেকটি 1.2 মি. ×1 মি.। ঘরটির চার দেয়াল প্রতি বর্গ মিটারে 70 টাকা হিসাবে রঙিন কাগজ দিয়ে ঢাকতে কত খরচ হবে।

10. একটি ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল 42 বর্গ মিটার এবং মেঝের ক্ষেত্রফল 12 বর্গ মিটার। ঘরটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার হলে, ঘরটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

11. সুজাতা 84 বর্গ সেমি. ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তাকার কাগজে ছবি আঁকবে। কাগজটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তর 5 সেমি.। সুজাতার কাগজটির পরিসীমা হিসাব করি।

12. সিরাজদের বর্গাকার বাগানের বাইরের চারদিকে 2.5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল 165 বর্গ মিটার। বাগানটির ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করি। ($\sqrt{2} = 1.414$)

13. যে বর্গাকার জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য $20\sqrt{2}$ মিটার তার চারধার পাঁচিল দিয়ে ঘিরতে কত মিটার দৈর্ঘ্যের পাঁচিল দিতে হবে হিসাব করে লিখি। প্রতি বর্গমিটারে 20 টাকা হিসাবে ঘাস বসাতে কত খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

14. আমাদের আয়তাকার বাগানের একটি কর্ণ বরাবর একটি বেড়া দেব। আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 মিটার ও 7 মিটার হলে, বেড়ার দৈর্ঘ্য হিসাব করে দেখি । বেড়াটি আয়তাকার বাগানকে যে দুটি ত্রিভুজে ভাগ করবে তার পরিসীমা লিখি।

15. মৌসুমীদের বাড়ির আয়তাকার বড় হলঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 9:5 এবং পরিসীমা 140 মিটার। মৌসুমীরা হলঘরের মেঝেতে 25 সেমি. × 20 সেমি. আকারের আয়তাকার টালি বসাতে চায়। প্রতি 100 টালির দাম 500 টাকা হলে, মৌসুমীদের হলঘরের মেঝেতে টালি বসাতে কত খরচ হবে হিসাব করি।

16. 18 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি বড়ো হলঘরে কার্পেট দিয়ে মুড়তে 2160 টাকা খরচ হয়। যদি হলঘরের প্রস্থ 4 মিটার কম হতো তাহলে 1620 টাকা খরচ হতো। হলঘরের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

17. একটি আয়তাকার জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য 15 মিটার এবং দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তর 3 মিটার। জমিটির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

18. 385 মিটার × 60 মিটার পরিমাপের একটি আয়তাকার চাতাল পাকা করতে সর্ববৃহৎ কত মাপের বর্গাকার টাইলস ব্যবহার করা যাবে এবং সেক্ষেত্রে টাইলসের সংখ্যা কত হবে হিসাব করি।

19. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q):

(i) একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $12\sqrt{2}$ সেমি.। বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

(a) 288 বর্গ সেমি. (b) 144 বর্গ সেমি. (c)72 বর্গ সেমি. (d) 18 বর্গ সেমি.

(ii) যদি একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A_1 বর্গ একক এবং ওই বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A_2 বর্গ একক হয়,তাহলে $A_1:A_2$ হবে

(a) 1: 2 (b) 2:1 (c) 1:4 (d) 4:1

(iii) 6 মিটার লম্বা ও 4 মিটার চওড়া একটি আয়তাকার জায়গা 2 ডেসিমি. বর্গ টালি দিয়ে বাঁধাতে হলে টালি লাগবে

(a) 1200 (b) 2400 (c) 600 (d) 1800

(iv) সমান পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে S এবং R হলে,

(a) $S = R$ (b) $S>R$ (c) $S<R$

(v) একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং ক্ষেত্রফল 62.5 বর্গ সেমি. হলে, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সমষ্টি

(a) 12 সেমি. (b) 15 সেমি. (c) 20 সেমি. (d) 25 সেমি.

20. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি করলে, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

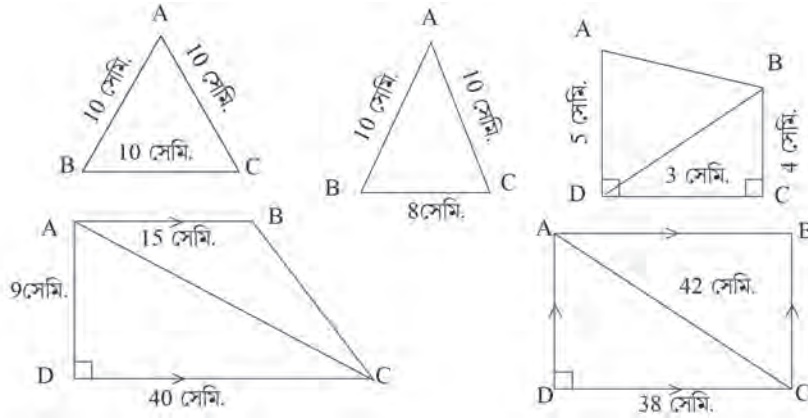
(ii) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10 % হ্রাস করা হলে, ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

(iii) একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে আয়তক্ষেত্রের একটি প্রস্থের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য 2 সেমি.। আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দৈর্ঘ্য কত?

(iv) একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে তার যে-কোনো বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ সেমি. হলে, বর্গক্ষেত্রটির প্রতিটি কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

(v) একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 34 সেমি. এবং ক্ষেত্রফল 60 বর্গ সেমি.। আয়তক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

কষে দেখি— 15.2

1. নীচের ছবিগুলির ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

2. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 48 সেমি. হলে, তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

3. ABC সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $5\sqrt{3}$ সেমি. হলে, ত্রিভুজটির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

4. ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং ভূমির দৈর্ঘ্য 4 সেমি. হলে, ΔABC -এর ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

5. যদি কোনো সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং সমান বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হয়, তবে ওই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

6. কোনো সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 544 সেমি. এবং সমান বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য ভূমির দৈর্ঘ্যের $\frac{5}{6}$ অংশ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

7. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য $12\sqrt{2}$ সেমি. হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

8. পৃথা একটি সামান্তরিক এঁকেছে যার কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সেমি. ও 8 সেমি. এবং কর্ণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণগুলির প্রত্যেকটি 90^0; সামান্তরিকের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য লিখি ও সামান্তরিকটির বৈশিষ্ট্য লিখি।

9. আমাদের পাড়ার ত্রিভুজাকৃতি একটি পার্কের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2:3:4; পার্কটির পরিসীমা 216 মিটার।
   (i) হিসাব করে পার্কটির ক্ষেত্রফল লিখি।
   (ii) পার্কটির বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে ওই বাহুতে সোজাসুজি যেতে কত পথ হাঁটতে হবে হিসাব করে লিখি।

10. পহলমপুর গ্রামের ত্রিভুজাকৃতি মাঠের তিনদিকের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 মিটার, 28 মিটার ও 30 মিটার।
   (i) প্রতি বর্গমিটারে 5 টাকা হিসাবে ত্রিভুজাকৃতি মাঠে ঘাস লাগাতে মোট কত টাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।
   (ii) ওই ত্রিভুজাকৃতি মাঠে প্রবেশের গেট তৈরির জন্য 5 মিটার জায়গা ছেড়ে বাকি চারধার বেড়া দিয়ে ঘিরতে প্রতি মিটার 18 টাকা হিসাবে মোট কত টাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

11. শাকিল একটি সমবাহু ত্রিভুজ PQR এঁকেছে। আমি ওই সমবাহু ত্রিভুজের অন্তস্থঃ কোনো বিন্দু থেকে ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর তিনটি লম্ব অঙ্কন করেছি যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সেমি., 12 সেমি. ও 8 সেমি.। হিসাব করে ΔPQR-এর ক্ষেত্রফল লিখি।

12. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 20 সেমি. এবং ওই বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45^0 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

13. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 20 সেমি. এবং ওই বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 30^0 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

14. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা $(\sqrt{2}+1)$ সেমি. হলে, ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

15. মারিয়া ঘন্টায় 18 কিমি. বেগে সাইকেল চালিয়ে 10 মিনিটে একটি সমবাহু ত্রিভুজাকার মাঠের পরিসীমা বরাবর ঘুরে এল। ত্রিভুজটির একটি কৌণিক বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত সোজা যেতে মারিয়ার কত সময় লাগবে হিসাব করে লিখি। $(\sqrt{3} \approx 1.732)$

16. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বৃদ্ধি করলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\sqrt{3}$ বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

17. একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $\sqrt{3} : 2$; বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য 60 সেমি. হলে, সমবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমা হিসাব করে লিখি।

18. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য এবং পরিসীমা যথাক্রমে 13 সেমি. এবং 30 সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

19. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 সেমি. এবং 5 সেমি.। সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি (3 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান)

20. 3সেমি., 4সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র থেকে একটি সর্ববৃহৎ বর্গাকারক্ষেত্র এমনভাবে কেটে নেওয়া হলো যার একটি শীর্ষবিন্দু ত্রিভুজটির অতিভুজের উপর অবস্থিত। বর্গাকারক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

21. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি. হলে, ত্রিভুজটির উচ্চতার পরিমাপ

(a) $4\sqrt{3}$ সেমি. (b) $16\sqrt{3}$ সেমি. (c) $8\sqrt{3}$ সেমি. (d) $2\sqrt{3}$ সেমি.

(ii) একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য a একক। ত্রিভুজটির পরিসীমা

(a) $(1+\sqrt{2})a$ একক (b) $(2+\sqrt{2})a$ একক (c) $3a$ একক (d) $(3+2\sqrt{2})a$ একক

(iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, পরিসীমা এবং উচ্চতা যথাক্রমে a, s এবং h হলে, $\frac{2a}{sh}$ -এর মান

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

(iv) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 5সেমি. এবং ভূমির দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

(a) 18 বর্গ সেমি. (b) 12 বর্গ সেমি. (c) 15 বর্গ সেমি. (d) 30 বর্গ সেমি.

(v) ABC ত্রিভুজের AC বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যে AD:DC=3:2; ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গসেমি. হলে BDC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

(a) 16 বর্গ সেমি. (b) 24 বর্গ সেমি. (c) 30বর্গ সেমি. (d) 36 বর্গ সেমি.

(vi) একটি ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা থেকে প্রতিটির বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর যথাক্রমে 8 সেমি., 7 সেমি. ও 5 সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

(a) $20\sqrt{7}$ বর্গ সেমি. (b) $10\sqrt{14}$ বর্গ সেমি. (c) $20\sqrt{14}$ বর্গ সেমি. (d) 140 বর্গ সেমি.

22. সংক্ষিপ্ত উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতার সাংখ্যমান সমান। ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

(ii) একটি ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি হয়?

(iii) একটি ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য তিনগুণ করলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি হয়?

(iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য (x–2) সেমি., x সেমি. এবং (x+2) সেমি.। ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত?

(v) একটি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা হলো। ত্রিভুজ ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

কষে দেখি— 15.3

1. রাতুল একটি সামান্তরিক এঁকেছে যার ভূমির দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং উচ্চতা 4 সেমি.। রাতুলের আঁকা সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

2. একটি সামান্তরিকের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ। যদি সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 98 বর্গ সেমি. হয়, তাহলে সামান্তরিকটির দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার পরিমাপ হিসাব করি।

3. আমাদের বাড়ির পাশে একটি সামান্তরিক আকারের জমি আছে যার সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 15 মিটার ও 13 মিটার। যদি এই জমির একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 14 মিটার হয়, তবে হিসাব করে সামান্তরিক আকারের জমির ক্ষেত্রফল লিখি।

4. পৃথা একটি সামান্তরিক এঁকেছে যার সন্নিহিত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 25সেমি. ও 15 সেমি. এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 20 সেমি.। হিসাব করে 25 সেমি. বাহুর উপর সামান্তরিকের উচ্চতার পরিমাপ লিখি।

5. একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 15সেমি. ও 12সেমি.। ক্ষুদ্রতর বাহু দুটির দূরত্ব 7.5 সেমি. হলে, বৃহত্তর বাহু দুটির দূরত্ব হিসাব করি।

6. একটি রম্বসের কর্ণদ্বয়ের পরিমাপ 15 মিটার ও 20 মিটার হলে, উহার পরিসীমা, ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

7. একটি রম্বসের পরিসীমা 440 মিটার এবং সমান্তরাল বাহুদুটির মধ্যে দূরত্ব 22 মিটার হলে, রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

8. যদি একটি রম্বসের পরিসীমা 20 সেমি. এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 6 সেমি. হয়, তবে ওই রম্বসের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

9. একটি ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1400 বর্গ ডেকামিটার। উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে লম্ব দূরত্ব 20 ডেকামিটার এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:4 হলে, ওই বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

10. 8 সেমি বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি (সংকেত ঃ সুষম ষড়ভুজের কর্ণগুলি আঁকা হলে ছয়টি সর্বসম সমবাহু ত্রিভুজ পাব)

11. ABCD চতুর্ভুজের AB= 5 মিটার, BC= 12মিটার, CD = 14 মিটার, DA = 15 মিটার এবং $\angle ABC = 90°$ হলে, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

12. সাহিন ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এঁকেছে, যার BD কর্ণের দৈর্ঘ্য 11সেমি. এবং A ও C বিন্দু থেকে BD কর্ণের উপর দুটি লম্ব এঁকেছে যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি. ও 11 সেমি.। হিসাব করে ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্র ABCD -এর ক্ষেত্রফল লিখি।

13. ABCDE একটি পঞ্চভুজ যার BC বাহুটি AD কর্ণের সমান্তরাল। EP, BC -এর উপর লম্ব এবং EP, AD -কে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC = 7সেমি., AD=13সেমি., PE= 9 সেমি., এবং $PQ = \frac{4}{9}$ PE হলে, ABCDE পঞ্চভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

14. একটি রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $40\sqrt{2}$ সেমি.। যদি রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:4 হয়, তাহলে রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

15. একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং সমান্তরাল বাহুদুটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি. ও 17 সেমি.। ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

16. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 19 সেমি. ও 9 সেমি. এবং তির্যক বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. ও 6 সেমি.। ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

17. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) একটি সামান্তরিকের উচ্চতা ভূমির এক-তৃতীয়াংশ। সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 192 বর্গসেমি. হলে, সামান্তরিকটির উচ্চতা

(a) 4 সেমি. (b) 8 সেমি. (c) 16 সেমি. (d) 24সেমি.

(ii) একটি রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6সেমি. এবং একটি কোণের পরিমাপ 60^0 হলে, রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(a) $9\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. (b) $18\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. (c) $36\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. (d) $6\sqrt{3}$ বর্গ সেমি.

(iii) একটি রম্বসের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্যের তিনগুণ। যদি রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 96 বর্গ সেমি. হয়, তাহলে বড় কর্ণটির দৈর্ঘ্য

(a) 8 সেমি. (b) 12 সেমি. (c) 16 সেমি. (d) 24 সেমি.

(iv) একটি রম্বস ও একটি বর্গক্ষেত্র একই ভূমির উপর অবস্থিত। বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একক এবং রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল y বর্গ একক হলে,

(a) $y > x^2$ (b) $y < x^2$ (c) $y = x^2$

(v) একটি ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 162 বর্গ সেমি. এবং উচ্চতা 6 সেমি.। ট্রাপিজিয়ামটির একটি সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য 23 সেমি. হলে, অপর সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য

(a) 29 সেমি. (b) 31সেমি. (c) 32 সেমি. (d) 33 সেমি.

18. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

(i) ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 96 বর্গ সেমি. ও BD কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 সেমি। A বিন্দু থেকে BD কর্ণের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

(ii) একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং 3সেমি.। বৃহত্তর বাহুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 2সেমি. হলে, ক্ষুদ্রতর বাহুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

(iii) একটি রম্বসের উচ্চতা 4 সেমি. এবং বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

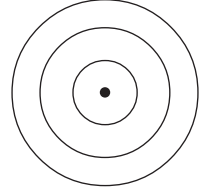
(iv) একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের যেকোনো সমান্তরাল বাহু সংলগ্ন একটি কোণ 45^0; ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুর দৈর্ঘ্য 62 সেমি. হলে, সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

(v) ABCD সামান্তরিকের AB= 4 সেমি., BC = 6 সেমি. এবং $\angle ABC = 30°$ হলে, ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

16 বৃত্তের পরিধি
(CIRCUMFERENCE OF CIRCLE)

এক সপ্তাহ পরে আমাদের রবীন্দ্রনগরের বড়ো মাঠে দৌড় প্রতিযোগিতা হবে। মাঠে বৃত্তাকার পথ তৈরি করতে হবে। তাই আমরা মাঠে চুন দিয়ে অনেকগুলি ছোটো বড়ো এককেন্দ্রীয় বৃত্ত তৈরি করেছি।

কিন্তু আমরা যদি এই ছোটো বড়ো বৃত্তের প্রতিটি বৃত্ত বরাবর সম্পূর্ণ দৌড়াই তাহলে কতটা পথ দৌড়াবো। এই পথের দৈর্ঘ্য কীভাবে পাব? অর্থাৎ প্রতিটি বৃত্তের পরিধি কীভাবে পাব।

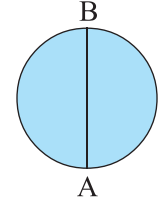
আমরা প্রথমে হাতেকলমে বৃত্তাকার চাকতি তৈরি করে তার পরিধি কত জানার চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

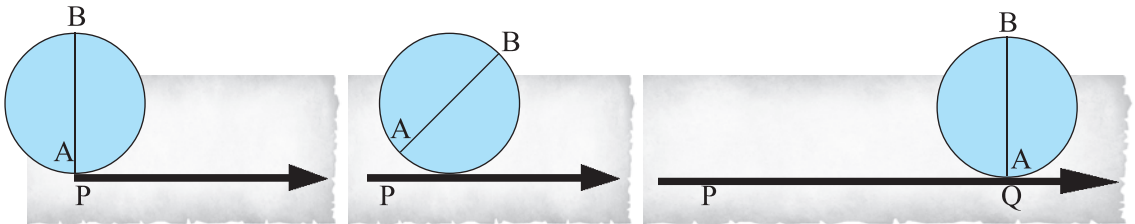
আজ আমরা বন্ধুরা 10টি মোটা কাগজের ছোটো বড়ো বৃত্তাকার চাকতি তৈরি করেছি। এই বৃত্তাকার চাকতিগুলির পরিধি জানার চেষ্টা করি।

(1) প্রথমে 1টি বৃত্তাকার চাকতি সমান দু-ভাঁজ করে এবং দু-ভাঁজ খুলে একটি রেখাঙ্কিত ভাঁজ AB পেলাম এবং A বিন্দুতে একটি দাগ দিয়ে চিহ্নিত করলাম।

B

A

(2) এবার কাগজে একটি রশ্মি আঁকলাম যার প্রান্তবিন্দু P

(3) এবার কাগজের উপর বৃত্তাকার চাকতিটি এমনভাবে রাখলাম যাতে বৃত্তাকার চাকতির A বিন্দু রশ্মির P বিন্দুর সঙ্গে মিশে থাকে।

(4) এবার বৃত্তাকার চাকতিটিকে রশ্মি বরাবর সম্পূর্ণ একবার ঘোরালাম যাতে A বিন্দুটি পুনরায় রশ্মিকে স্পর্শ করে। ধরি, চাকতির A বিন্দুটি রশ্মিকে পুনরায় Q বিন্দুতে স্পর্শ করল।

PQ সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যই হল বৃত্তাকার চাকতির পরিধি।

আমি সাদা কাগজে রশ্মি এঁকে একইভাবে ওই বৃত্তাকার চাকতিটির পরিধি তিন-চারবার দেখলাম। এবার 5টি বৃত্তাকার চাকতির ব্যাসার্ধ ও ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও পরিধি জেনে নীচের ছকটি পূরণ করি।

বৃত্ত	ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য	ব্যাসের দৈর্ঘ্য	পরিধি	অনুপাত $= \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাসের দৈর্ঘ্য}}$
1 নং	7 সেমি.	14 সেমি.	44 সেমি.	$\frac{44}{14} = \frac{22}{7} \approx 3.14$
2 নং	10.5 সেমি.	21 সেমি.	66 সেমি.	$\frac{66}{21} = \frac{22}{7} \approx 3.14$
3 নং	5 সেমি.	10 সেমি.	31 সেমি.	$\frac{31}{10} = 3.1$
4 নং	8 সেমি.	16 সেমি.	50.5 সেমি.	$\frac{50.5}{16} \approx 3.16$
5 নং	10 সেমি.	___ সেমি.	___ সেমি.	$\frac{\square}{\square} = \square$

বাকিগুলি গোলাকার চাকতির মাপ নিয়ে নিজে লিখি।

দেখছি, প্রতিটি বৃত্তাকার চাকতির পরিধি তার ব্যাসের ___ [1/2/3] গুণের চেয়ে কিছু বেশি।

অর্থাৎ,উপরের ছক থেকে পাই, প্রতিটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা। এই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিকে π (পাই) চিহ্ন দ্বারা লেখা হয় এবং π এর মান $\frac{22}{7}$ (প্রায়) বা ___ (প্রায়)

এখন ধরি, একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r একক

সুতরাং, বৃত্তটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য = 2r একক

$\therefore \frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{ব্যাসের দৈর্ঘ্য}} = \pi$

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $\pi \times$ ব্যাসের দৈর্ঘ্য = $\pi \times 2r$ একক = $2\pi r$ একক

যেখানে π -এর মান $\frac{22}{7}$ বা 3.14 (প্রায়)

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $\pi \times$ ব্যাসের দৈর্ঘ্য = $2 \times \pi \times$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

1 যে বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি., তার পরিধি হিসাব করি।

বৃত্তের পরিধি = $\pi \times$ 12 সেমি. = 3.14×12 সেমি. = ___ সেমি.

2 দুটি বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 14 সেমি.ও 20 সেমি.। তাদের পরিধি হিসাব করে দেখি।[নিজে করি]

3 খেলার মাঠের এককেন্দ্রিক বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 মিটার, 15 মিটার, 16 মিটার হলে, সেই বৃত্তগুলি বরাবর সম্পূর্ণ একপাক দৌড়ালে, প্রতিটি বৃত্তাকার পথের জন্য কতটা পথ দৌড়াতে হবে হিসাব করে লিখি।

যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 মিটার হয়, তাহলে, পরিধি = $2 \times \frac{22}{7} \times 14$ মিটার = ___ মিটার

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 মিটার হলে, ওই বৃত্তে সম্পূর্ণ একপাক দৌড়ালে 88 মিটার দৌড়াতে হবে।

বাকি বৃত্তগুলিতে সম্পূর্ণ একপাক দৌড়ালে কতটা পথ দৌড়াতে হবে আমি হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

4 আমি কোনো বৃত্তাকার চাকতিকে যদি সমান দুটি ভাগে ভাগ করি তখন প্রতিটি ভাগের পরিসীমা কী হবে ছবি এঁকে হিসাব করি।

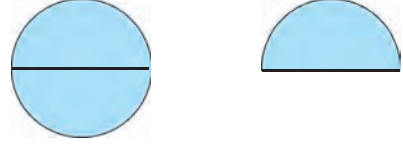
ধরি, বৃত্তাকার চাকতির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = ☐ একক

বৃত্তের অর্ধ পরিধি = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ একক = πr একক

বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য = ☐ একক

$\therefore$ অর্ধবৃত্তাকার চাকতির পরিসীমা = ($\pi r + 2r$) একক

$\therefore$ অর্ধবৃত্তের পরিসীমা = $\pi r + 2r$

5 যে অর্ধবৃত্তাকার চাকতির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10.5 সেমি., তার পরিসীমা = ($\pi \times 10.5 + 2 \times 10.5$) সেমি. = ☐ সেমি.। [নিজে করি]

6 রামু অর্ধবৃত্তাকার জমির চারধার বেড়া দিয়ে ঘিরবে। যদি অর্ধবৃত্তাকার জমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 9 মিটার হয়, তবে প্রতি মিটার 22 টাকা হিসাবে রামুর জমির চারধার বেড়া দিয়ে ঘিরতে মোট কত টাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

রামুদের অর্ধবৃত্তাকার জমির পরিসীমা

= $\frac{22}{7} \times 9$ মিটার + ☐ মিটার = ☐ মিটার

$\therefore$ জমির চারধারে বেড়া দিতে খরচ হবে = ☐ × ☐ টাকা = ☐ টাকা

7 মিতাদের অর্ধবৃত্তাকার জমি বেড়া দিয়ে ঘিরতে 162 মিটার লম্বা রেলিং প্রয়োজন। ব্যাসের দিকে মিতাদের জমির দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ধরি, মিতাদের অর্ধবৃত্তাকার জমির ব্যাসার্ধ r মিটার।

$\therefore$ অর্ধবৃত্তাকার জমির পরিসীমা = $(\pi r + 2r)$ মিটার = $(\frac{22}{7} r + 2r)$ মিটার

= $\frac{22r + 14r}{7}$ মিটার = $\frac{36r}{7}$ মিটার

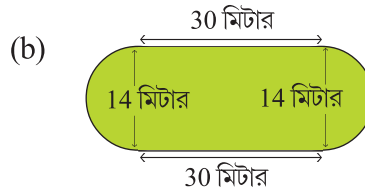
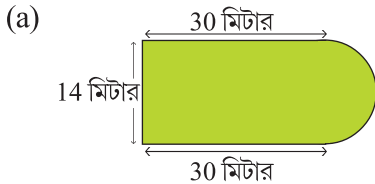
শর্তানুসারে, $\frac{36r}{7} = 162$

বা, $r = \frac{162 \times 7}{36}$ $\therefore r =$ ☐

$\therefore$ মিতাদের জমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য = 2r মিটার = ☐ মিটার

8 নীচের প্রত্যেকটি জমির পরিসীমা লিখি।

(a)

(b)

(a) জমির অর্ধবৃত্তাকার অংশের পরিসীমা = π × ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

= $\pi \times \frac{14}{2}$ মিটার

= $\frac{22}{7} \times \frac{14}{2}$ মিটার = 22 মিটার

$\therefore$ নির্ণেয় জমির পরিসীমা = 30 মিটার + 14 মিটার + 30 মিটার + 22 মিটার = ☐ মিটার

একইভাবে হিসাব করে দেখছি (b) জমির পরিসীমা = ☐ মিটার [নিজে করি]

9 একটি ইঞ্জিনের সামনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 70 সেমি. এবং পিছনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 168 সেমি.। যে দূরত্ব অতিক্রম করতে সামনের চাকা 600 বার ঘোরে, সেই দূরত্ব অতিক্রম করতে পিছনের চাকা কতবার ঘুরবে হিসাব করে লিখি।

ইঞ্জিনের সামনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 70 সেমি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{70}{2}$ সেমি. $= 35$ সেমি.

সামনের চাকাটি একবার ঘুরলে তার পরিধির সমান দৈর্ঘ্য অতিক্রম করবে। হিসাব করে দেখি সামনের চাকা একবার ঘুরলে কতটা পথ অতিক্রম করবে।

সামনের চাকার পরিধি $= 2 \times \pi \times 35$ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35$ সেমি. $= \square$ সেমি.

$\therefore$ সামনের চাকা 1 বার ঘুরলে যায় $= 220$ সেমি.

$\therefore$ সামনের চাকা 600 বার ঘুরলে যায় $= 220 \times 600$ সেমি.

কিন্তু পিছনের চাকা 220×600 সেমি. পথ অতিক্রম করতে কতবার ঘুরবে হিসাব করে দেখি।

পিছনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য $= \square$ সেমি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \square$ সেমি.

$\therefore$ পরিধি $= 2 \times \frac{22}{7} \times 84$ সেমি. $= 44 \times 12$ সেমি.

$\therefore$ পিছনের চাকা ঘুরবে $= \frac{220 \times 600}{44 \times 12}$ বার $= \square$ বার

$\therefore$ যে দূরত্ব অতিক্রম করতে সামনের চাকা 600 বার ঘুরবে, সেই দূরত্ব অতিক্রম করতে পিছনের চাকা 250 বার ঘুরবে।

10 যদি ইঞ্জিনের সামনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 80 সেমি. এবং পিছনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 224 সেমি. হয়, তাহলে যে দূরত্ব অতিক্রম করতে সামনের চাকা 700 বার ঘোরে, সেই দূরত্ব অতিক্রম করতে পিছনের চাকা কতবার ঘুরবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

11 আমাদের বৃত্তাকার পার্কের চারধার ঘিরে সমান চওড়া একটি পথ আছে। পথটির বাইরের প্রান্তের পরিধি 500 মিটার এবং ভিতরের প্রান্তের পরিধি 478 মিটার হলে, পথটি কত চওড়া হিসাব করে লিখি।

ধরি, রাস্তাসহ পার্কের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R মিটার এবং পার্কের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

সুতরাং পথটি (R – r) মিটার চওড়া।

প্রশ্নানুসারে, $2\pi R = 500$

$2\pi r = 478$

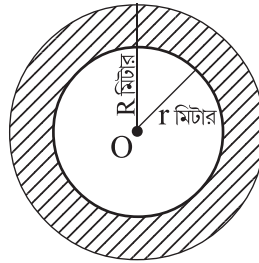
$2\pi R - 2\pi r = 500 - 478$

বা, $2\pi (R - r) = 22$

বা, $2 \times \frac{22}{7}(R - r) = 22$

বা, $R - r = \frac{22\times7}{2\times22}$

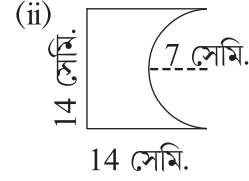
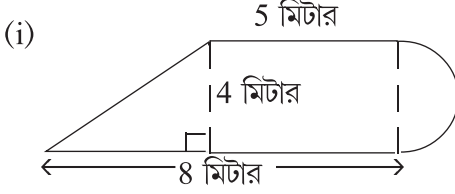
$\therefore R - r = 3.5$

$\therefore$ পথটি 3.5 মিটার চওড়া।

12 যদি বৃত্তাকার পার্কের ভিতরের দিকের পরিধি 132 মিটার এবং বাইরের দিকের পরিধি 154 মিটার হয়, তবে রাস্তাটি কত চওড়া হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি – 16

1. **নীচের ছবিগুলির পরিসীমা হিসাব করে লিখি—**

(i)

(ii)

2. 35 মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার তারের রিং তৈরি করতে কত লম্বা তার নেব হিসাব করে লিখি।

3. একটি ট্রেনের চাকার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 0.35 মিটার। 1 মিনিটে চাকাটি 450 বার ঘুরলে ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিমি. হিসাব করে লিখি।

4. আমোদপুর গ্রামের একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 280 মিটার। চৈতালি প্রতি ঘণ্টায় 5.5 কিমি. বেগে হেঁটে মাঠটি পরিক্রমা করতে চায়। হিসাব করে দেখি মাঠটি একবার প্রদক্ষিণ করতে চৈতালির কত সময় লাগবে?

5. তথাগত একটি তামার তার আয়তাকারে বেঁকিয়েছে যার দৈর্ঘ্য 18 সেমি. এবং প্রস্থ 15 সেমি.। আমি এই তামার তারটি বেঁকিয়ে বৃত্ত তৈরি করলাম। হিসাব করে এই বৃত্তাকার তামার তারটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য লিখি।

6. একটি অর্ধবৃত্তাকার মাঠের পরিসীমা 108 মিটার হলে, মাঠের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

7. একটি চাকার পরিধি ও ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অন্তর 75 সেমি. হলে, ওই চাকার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

8. 28 মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তাকার ট্র্যাকে পূজা ও জাকির একই জায়গা থেকে একই সময়ে প্রতিযোগিতা শুরু করে। পূজা যখন 4 পাক ঘুরে প্রতিযোগিতা শেষ করে জাকির তখন এক পাক পিছনে থাকে। প্রতিযোগিতাটি কত মিটারের ছিল এবং পূজা জাকিরকে কত মিটারে পরাজিত করেছে হিসাব করে লিখি।

9. আমাদের পাড়ার একটি পাতকুয়োর পরিধি 440 সেমি.। এই পাতকুয়োর চারধারে সমান চওড়া একটি পাথরের পাড় আছে। যদি বেধসমেত পাতকুয়োর পরিধি 616 সেমি. হয়, তবে পাথরের পাড় কত চওড়া হিসাব করে লিখি।

10. গ্রামের নিয়ামতচাচা একটি মোটরের চাকার সঙ্গে বেল্ট দিয়ে একটি মেশিনের চাকা যুক্ত করেছেন। মোটরের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. এবং মেশিনের চাকার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 94.5 সেমি.। মোটরের চাকা যদি প্রতি সেকেন্ডে 27 বার ঘোরে, তবে মেশিনের চাকা ঘণ্টায় কতবার ঘুরবে হিসাব করে লিখি।

11. আমাদের ক্লাব ঘরের ঘড়িটির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8.4 সেমি. ও 14 সেমি.। একদিনে প্রতিটি কাঁটা কতটা দূরত্ব অতিক্রম করবে হিসাব করে লিখি।

> সংকেত : ঘণ্টার কাঁটা 12 ঘণ্টায় অতিক্রম করবে $= 2 \times \frac{22}{7} \times 8.4$ সেমি.
>
> মিনিটের কাঁটা 1 ঘণ্টায় অতিক্রম করবে $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ সেমি.

12. আমি ও বন্ধু মিহির দুটি বৃত্ত এঁকেছি যাদের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত ☐ : ☐। হিসাব করে দেখছি আমাদের বৃত্তের পরিধির অনুপাত হয় ☐ : ☐।

13. রহিমের একটি বৃত্তাকার মাঠের পুরোটা একবার দৌড়াতে যে সময় লাগে, ব্যাস বরাবর একপ্রান্ত থেকে আর একপ্রান্তে যেতে তার থেকে 40 সেকেন্ড কম সময় লাগে। রহিমের গতিবেগ 90 মিটার প্রতি মিনিট হলে, মাঠের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

14. দুটি বৃত্তের পরিধির অনুপাত 2:3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অন্তর 2 সেমি.। বৃত্ত দুটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

15. 196 বর্গ সেমি. ক্ষেত্রফলের একটি বর্গাকার পিতলের পাত থেকে চারটি সর্ববৃহৎ বৃত্তাকার পাত কেটে নেওয়া হলো। প্রতিটি বৃত্তাকার পাতের পরিধি হিসাব করে লিখি।

16. একটি বৃত্তাকার মাঠের বৃত্ত বরাবর একপ্রান্ত থেকে অপরপ্রান্তে যেতে নাসিফার যে সময় লাগে, মাঠের ব্যাস বরাবর অতিক্রম করতে তার থেকে 45 সেকেন্ড সময় কম লাগে। নাসিফার গতিবেগ মিনিটে 80 মিটার হলে, মাঠটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

17. মহিম সাইকেলে চেপে 7 মিটার 5 ডেসিমি. চওড়া একটি বৃত্তাকার পথের বাইরের ও ভিতরের ধার বরাবর সম্পূর্ণ একবার ঘুরতে যথাক্রমে 46 সেকেন্ড ও 44 সেকেন্ড নেয়। ভিতরের ধার বরাবর বৃত্তটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করি।

18. একজন সাইকেল আরোহীর একটি বৃত্তাকার পথে বাইরের ও ভিতরের ধার বরাবর সম্পূর্ণ একবার ঘুরতে সময়ের অনুপাত 20:19; যদি পথটি 5 মিটার চওড়া হয়, তবে ভিতরের বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য লিখি।

19. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার গতিবেগের অনুপাত

(a) 1:12 (b) 12:1 (c) 1:24 (d) 24:1

(ii) একটি বৃত্তাকার পার্ক সম্পূর্ণ একবার পরিক্রমা করতে সোমার $\frac{\pi x}{100}$ মিনিট সময় লাগে। পার্কটি সোজাসুজি ব্যাস বরাবর অতিক্রম করতে সোমার সময় লাগবে

(a) $\frac{x}{200}$ মিনিট (b) $\frac{x}{100}$ মিনিট (c) $\frac{\pi}{100}$ মিনিট (d) $\frac{\pi}{200}$ মিনিট

(iii) একটি বৃত্ত একটি বর্গক্ষেত্রে অন্তর্লিখিত। বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) 10 সেমি. (b) 5সেমি. (c) 20 সেমি. (d) $10\sqrt{2}$ সেমি.

(iv) একটি বৃত্ত একটি বর্গক্ষেত্রে পরিলিখিত। বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) $5\sqrt{2}$ সেমি. (b) $10\sqrt{2}$ সেমি. (c) 5 সেমি. (d) 10 সেমি.

(v) একটি বৃত্তাকার বলয় 5 সেমি. চওড়া। বৃত্তের বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অন্তর

(a) 5সেমি. (b) 2.5 সেমি. (c) 10 সেমি. (d) কোনোটিই নয়।

20. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি অর্ধবৃত্তের পরিসীমা 36সেমি. হলে, অর্ধবৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত?

(ii) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 7 সেমি.। 90^0 কোণ ঘুরতে মিনিটের কাঁটা কত দৈর্ঘ্য ঘুরবে?

(iii) কোনো বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অনুপাত কত?

(iv) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 7 সেমি.। 15 মিনিটে কাঁটাটি কত দৈর্ঘ্য ঘুরবে?

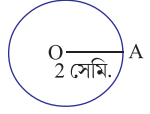
(v) একটি বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য এবং একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত কত?

17 সমবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য
(THEOREMS ON CONCURRENCE)

প্রতি বছরের মতো এবছরেও আমাদের স্কুলে পরিবেশ দিবস পালন করা হবে। এবছরে আমরা ঠিক করেছি পরিবেশ সচেতনতার ছবিগুলি আলাদা আলাদা পিচবোর্ডে না রেখে একটা বড়ো পিচবোর্ডে আলাদা আলাদা বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকারক্ষেত্রে একসঙ্গে রাখব।

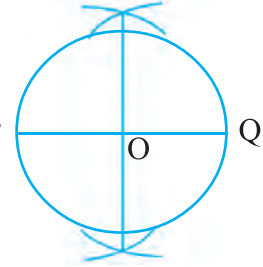
প্রথমে ছবি অনুযায়ী পিচবোর্ডটিকে কতকগুলি বৃত্তাকার ক্ষেত্রে ভাগ করার চেষ্টা করব। তাই আজ আমরা আমাদের স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে বিভিন্ন মাপের বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করব। কিন্তু একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত আঁকার জন্য একটি নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ প্রয়োজন।

আমি প্রথমে ব্ল্যাকবোর্ডে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে আঁকলাম।

O —— A
2 সেমি.

সুমিতা কিন্তু বোর্ডে দুটি বিন্দু P ও Q আঁকল।

আমি P ও Q বিন্দুগামী একটি বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি, যার ব্যাসের দৈর্ঘ্য PQ

প্রথমে P ও Q যোগ করে PQ সরলরেখাংশ পেলাম।

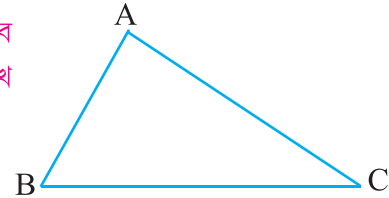
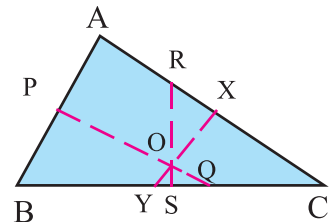
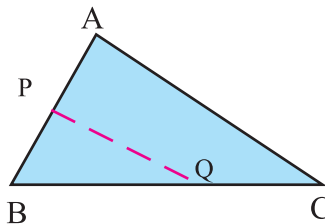
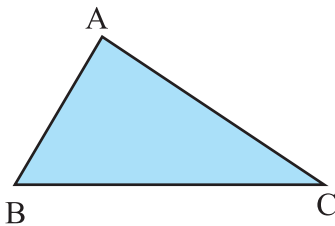
এবার PQ সরলরেখাংশকে পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে সমদ্বিখণ্ডিত করে কেন্দ্র O পেলাম। O-কে কেন্দ্র করে OP বা OQ দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকলাম যার একটি ব্যাস PQ

আমার বন্ধু রশিদ কিন্তু এবার বোর্ডে তিনটি অসমরেখ বিন্দু A, B ও C আঁকল।

কিন্তু তিনটি অসমরেখ বিন্দুর সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত কীভাবে পাব? অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি যা এই তিনটি অসমরেখ A, B ও C বিন্দুগামী।

A
B C

A , B; B, C; ও C, A যোগ করে ΔABC পেলাম,

$\therefore$ একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত আঁকব যা Δ ABC -এর শীর্ষবিন্দুগামী।

নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র পাওয়ার জন্য প্রথমে হাতেকলমে একটি বিন্দু নির্ণয়ের চেষ্টা করব যা A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী।

হাতেকলমে

(I) খাতায় একটি যে কোনো ত্রিভুজ ABC এঁকে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।

(II) এবার AB বাহুকে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু B বিন্দুর সাথে মিলে যায় এবং ভাঁজ খুলে PQ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক পেলাম।

(III) একইভাবে ভাঁজ করে BC ও CA বাহুর দুটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে RS ও XY পেলাম।

দেখছি, PQ, RS এবং XY লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

∴ হাতেকলমে পেলাম, ΔABC-এর AB, BC ও CA-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি **সমবিন্দু**।

দুটির বেশি ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখার একটি সাধারণ বিন্দু থাকলে সরলরেখাগুলিকে **সমবিন্দু সরলরেখা (Concurrent lines)** বলা হয়।

মেপে দেখছি, O বিন্দুটি A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী। অর্থাৎ, OA = OB = OC

তাই O-কে কেন্দ্র করে OA বা OB বা OC দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হলো।

O বিন্দুটিকে কী বলা হয়?

O বিন্দুটিকে ΔABC -এর **পরিকেন্দ্র** বলা হয় এবং O বিন্দুকে কেন্দ্র করে যে বৃত্ত পেলাম যা ΔABC-এর শীর্ষবিন্দুগামী, তাকে ΔABC -এর **পরিবৃত্ত** বলা হয়। OA বা OB বা OC হলো ΔABC-এর **পরিব্যাসার্ধ**।

আমি আমার খাতায় ΔPQR এঁকে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম এবং একইভাবে হাতে কলমে কাগজ ভাঁজ করে PQ, QR ও RP-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় করলাম।

দেখছি, PQ, QR ও RP-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি ☐ [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য - 27 ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

ধরি, ΔABC -এর AB, BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E ও F; D ও E বিন্দুতে যথাক্রমে AB ও BC বাহুর উপর লম্ব দুটি O বিন্দুতে মিলিত হয় (যেহেতু AB ও BC বাহু সমান্তরাল নয়)। O, F যুক্ত করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে: D, E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে AB, BC ও CA-এর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু। অর্থাৎ OF, AC বাহুর উপর লম্ব প্রমাণ করলেই প্রমাণিত হবে ত্রিভুজের লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

অঙ্কন : O,A ; O, B ; O, C যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔAOD ও ΔBOD -এর মধ্যে

AD = BD [∵ D, AB বাহুর মধ্যবিন্দু]

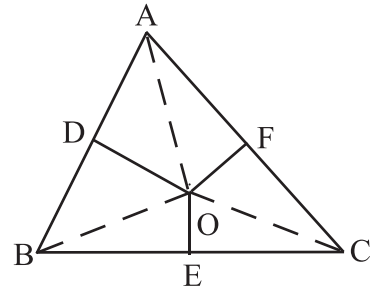
$\angle$ADO = $\angle$BDO = 1 সমকোণ [∵ OD $\perp$ AB]

OD সাধারণ বাহু

∴ ΔAOD ≅ ΔBOD [সর্বসমতার S – A – S শর্তানুসারে]

∴ OA = OB [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] .... (i)

অনুরূপভাবে, সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে, $\triangle$BOE ≅ $\triangle$COE

∴ OB = OC .... (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পেলাম OA = OC .... (iii)

এবার $\triangle AFO$ এবং $\triangle CFO$-এর মধ্যে,

OA = OC

AF = CF [$\because$ F, AC বাহুর মধ্যবিন্দু]

OF সাধারণ বাহু

$\therefore$ $\triangle AFO \cong \triangle CFO$ [সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\angle AFO = \angle CFO$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

দেখছি, AC সরলরেখাংশের উপর OF দণ্ডায়মান হওয়ার ফলে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদুটি সমান।

$\therefore$ OF, AC বাহুর উপর লম্ব।

সুতরাং, $\triangle ABC$-এর বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

আমি উপরের উপপাদ্যে $\triangle ABC$-এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু F না ধরে O থেকে AC-এর উপর লম্ব অঙ্কন করে প্রমাণ করি যে লম্বটি AC-এর মধ্যবিন্দুগামী। [নিজে করি]

নিজে করি-17.1

(1) আমি PQR একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ আঁকি ও প্রমাণ করি যে PQ, QR ও RP-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু। এক্ষেত্রে $\triangle PQR$-এর পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের কোথায় অবস্থিত [ভিতর/বাহিরে/বাহুর উপর] লিখি।

(2) আমি ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ আঁকি ও বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু প্রমাণ করি। $\triangle ABC$-এর পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের কোথায় অবস্থিত (ভিতরে/বাহিরে/বাহুর উপর) লিখি।

(3) রীতা XYZ একটি সমকোণী ত্রিভুজ এঁকেছে। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, Δ XYZ-এর বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু এবং XYZ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রটির অবস্থান ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের কোথায় (ভিতরে/বাহিরে/কোনো বাহুর উপর কোনো বিন্দুতে) লিখি।

প্রয়োগ: একটি ত্রিভুজের দুটি ক্ষুদ্রতর বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গের সমষ্টি বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গের সমান হলে ত্রিভুজটি সমকোণী হয়।

যেমন, 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। কারণ, $3^2 + 4^2 = 5^2$ । এই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের ☐ অবস্থিত। [নিজে লিখি]

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হলে, ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে তা লিখি।

যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দুতে অবস্থিত, তাই ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{5}{2}$ সেমি. = 2.5 সেমি.।

আমরা রসিদের আঁকা তিনটি বিন্দু A, B ও C দিয়ে একটি বৃত্ত আঁকতে পেরেছি এবং আমরা আরও লক্ষ্য করেছি যে, যে-কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখন্ডক তিনটি সমবিন্দু।

নিজে করি-17.2

(1) একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.,8 সেমি. ও 10 সেমি. হলে, ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে তা লিখি।

(2) একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত হবে তা লিখি।

প্রয়োগ 1 ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হলে, $\angle BOC$ এবং $\angle BAC$-এর সম্পর্ক কী হবে তা নির্ণয় করি।

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O

প্রমাণ করতে হবে যে: $\angle BOC$ এবং $\angle BAC$-এর সম্পর্ক নির্ণয়।

অঙ্কন : A, O যুক্ত করে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম।

প্রমাণ : ΔAOB-তে, AO=OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore\ \angle OAB = \angle OBA$

বহিঃস্থ $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB\ (\because \angle OAB = \angle OBA)$ .... (1)

ΔAOC-তে, OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore\ \angle OAC = \angle OCA$

বহিঃস্থ $\angle COD = \angle OAC + \angle OCA$

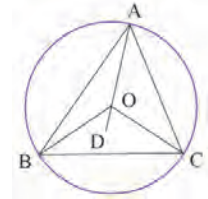
$= 2\angle OAC\ (\because \angle OAC = \angle OCA)$ .... (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$\angle BOD + \angle COD = 2\angle OAB + 2\angle OAC$

বা, $\angle BOC = 2(\angle OAB + \angle OAC)$

$\therefore\ \angle BOC = 2\angle BAC$

সুতরাং, $\angle BOC$, $\angle BAC$ -এর দ্বিগুণ

প্রয়োগ 2 O পরিকেন্দ্রবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = 85^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$ হলে, $\angle BOC$ এবং $\angle OBC$ এর পরিমাপ কত তা লিখি।

$\angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)$

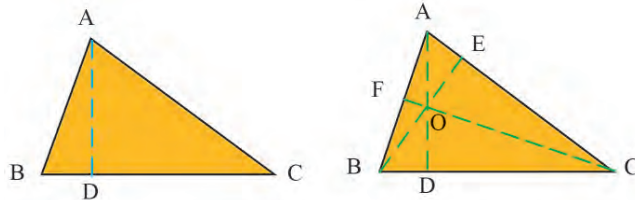
$= 180^\circ - (85^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

$\angle BOC = 2\angle BAC$

$\therefore\ \angle BOC = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$

$\angle OBC = \angle OCB\ (\because OB = OC)$ $\qquad \therefore \angle OBC = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

কিন্তু যদি কোনো ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানি, তবে ওই তিনটি লম্ব কী সমবিন্দু হবে? ত্রিভুজ এঁকে ও কেটে নিয়ে হাতে কলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

(i) প্রথমে যে কোনো একটি ত্রিভুজ ABC আঁকলাম ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।

(ii) এবার A শীর্ষবিন্দু বরাবর BC বাহুকে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে B বিন্দুটি BC বাহু বরাবর এবং BC বাহুর উপরে থাকে। ভাঁজ খুলে AD সরলরেখাংশ পেলাম। অর্থাৎ হাতেকলমে A বিন্দু থেকে BC-এর উপর লম্ব AD পেলাম।

(iii) একইভাবে কাগজ ভাঁজ করে B ও C শীর্ষবিন্দু থেকে যথাক্রমে AC ও AB-এর উপর দুটি লম্ব BE ও CF পেলাম।

দেখছি, AD, BE ও CF লম্ব তিনটি পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

অর্থাৎ হাতেকলমে পেলাম, ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু।

আমি অন্য যে কোনো একটি ত্রিভুজ PQR অঙ্কন করলাম। হাতেকলমে কাগজ ভাঁজের মাধ্যমে ΔPQR-এর শীর্ষবিন্দু P, Q ও R থেকে যথাক্রমে বিপরীত বাহু QR, RP, ও PQ-এর উপর তিনটি লম্ব পেলাম।

দেখছি, এই লম্ব তিনটি সমবিন্দু। [নিজে করি]

উপপাদ্য - 28 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, "ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু"।

প্রদত্ত: ধরি, ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A, B ও C থেকে বিপরীত বাহু BC, CA ও AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি যথাক্রমে AD, BE ও CF

প্রমাণ করতে হবে যে: AD, BE ও CF সমবিন্দু।

অঙ্কন: A, B ও C বিন্দু দিয়ে যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করল। সুতরাং, একটি ত্রিভুজ PQR গঠিত হলো।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, APBC, ABCR ও ABQC প্রত্যেকেই সামান্তরিক।

সামান্তরিক APBC ও সামান্তরিক ABCR থেকে পাই,

AP = BC এবং AR = BC

$\therefore$ AP = AR

অর্থাৎ, PR বাহুর মধ্যবিন্দু A

একইভাবে পাই, B ও C যথাক্রমে PQ ও QR -এর মধ্যবিন্দু।

আবার, PR || BC [অঙ্কনানুসারে] এবং AD $\perp$ BC,

$\therefore$ AD $\perp$ PR (∵ PR || BC এবং AD ভেদক $\therefore \angle ADC + \angle DAR = 180^0$,

∵ $\angle ADC = 90^0$, $\therefore \angle DAR = 90^0$)

একইভাবে পাই, BE $\perp$ PQ এবং CF $\perp$ QR

$\therefore$ পেলাম, AD, BE ও CF যথাক্রমে ΔPQR-এর PR, PQ ও QR বাহু তিনটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

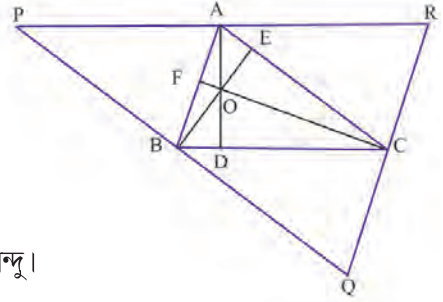
একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

সুতরাং, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলি BC, CA এবং AB বাহু তিনটির উপর লম্বগুলি সমবিন্দু। [প্রমাণিত]

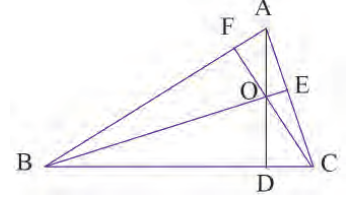
পেলাম, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু। অর্থাৎ লম্ব তিনটি একটি বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

এই সাধারণ বিন্দুকে কী বলা হয়?

অঙ্কিত লম্বগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয় সেই বিন্দুকে লম্ববিন্দু বলা হয়।

$\therefore$ O, Δ ABC- এর লম্ববিন্দু।

ABC ত্রিভুজের D,E,F বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে DEF ত্রিভুজটি পাওয়া যায়, সেই ত্রিভুজটিকে পাদ ত্রিভুজ (Pedal Triangle) বলে।

প্রয়োগ: 3 ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O; $\angle BOC = 80^\circ$ হলে, $\angle BAC$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

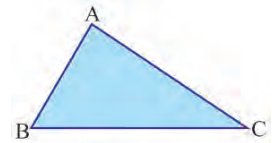
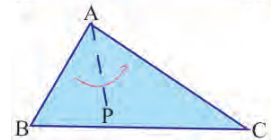
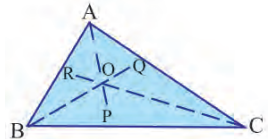
AFOE চতুর্ভুজের, $\angle OFA = 90^\circ$, $\angle OEA = 90^\circ$;
$\angle BOC$ = বিপ্রতীপ $\angle EOF$ $\therefore$ $\angle EOF = 80^\circ$
$\angle BAC = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 80^\circ) = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$
($\because$ চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 360°)

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বকে ত্রিভুজের উচ্চতা বলে। সুতরাং এই ধর্মটিকে এভাবেও বলতে পারি যে, ত্রিভুজের উচ্চতা তিনটি সমবিন্দু। উচ্চতাগুলির সাধারণ ছেদবিন্দুকে লম্ববিন্দু বলে।

আমি একটি সূক্ষ্মকোণী, একটি সমকোণী ও একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ আঁকি ও প্রতিক্ষেত্রে প্রমাণ করি যে শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলি সমবিন্দু। প্রতিক্ষেত্রে দেখি লম্ববিন্দুটি ত্রিভুজের কোথায় অবস্থিত। [নিজে করি]

ত্রিভুজের অন্য ধর্ম হাতে কলমে যাচাই-এর জন্য তমাল আর্ট পেপার এনে অনেকগুলি নানান ধরনের ত্রিভুজ আঁকল ও ক্ষেত্রগুলি কেটে আলাদা করে রাখল। তৃষা একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে হাতে কলমে কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক পাওয়ার চেষ্টা করতে লাগল।

আমিও তৃষার মতো একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC নিয়ে হাতে কলমে কাগজ ভাঁজ করে $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক পাওয়ার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

হাতে কলমে

(1) প্রথমে যে-কোনো একটি ত্রিভুজ ABC আঁকলাম ও কেটে নিয়ে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র পেলাম।

(2) এবার $\angle BAC$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক হাতে কলমে পাওয়ার জন্য $\angle BAC$ শীর্ষবিন্দু বরাবর $\angle BAC$-কে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে AB বাহু AC বাহুর উপর মিশে যায়। ভাঁজ খুলে $\angle BAC$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক AP পেলাম।

3. একইভাবে কাগজ ভাঁজ করে হাতে কলমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক দুটি যথাক্রমে BQ ও CR নির্ণয় করলাম।

দেখছি, Δ ABC এর $\angle A$, $\angle B$, ও $\angle C$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে AP, BQ ও CR পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

অর্থাৎ হাতে কলমে পেলাম, Δ ABC-এর কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু।

আমি যে কোনো একটি Δ PQR এঁকে ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম। PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের কাগজ ভাঁজ করে একইভাবে হাতে কলমে দেখছি Δ PQR-এর কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য - **29** ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

ধরি, ABC একটি ত্রিভুজ। মনে করি, ∠B ও ∠C-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A,O যোগ করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে: ∠A, ∠B, ∠C-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু। অর্থাৎ AO, ∠BAC-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক প্রমাণ করলেই প্রমাণিত হবে ত্রিভুজের তিনটি কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

অঙ্কন: OP ⊥AB, OQ⊥ BC এবং OR⊥AC অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ: ΔBOQ ও ΔBOP-এর মধ্যে,

∠OBQ= ∠OBP [যেহেতু,BO,∠B -এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক]

∠OQB= ∠OPB [প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ]

এবং BO সাধারণ বাহু

∴ Δ BOQ ≅ Δ BOP [সর্বসমতার A-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, OQ= OP [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] ---------------------- (i)

একইভাবে প্রমাণ করতে পারি যে, Δ COQ ≅ Δ COR

∴ OQ = OR [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]................(ii)

∴ (i) নং ও (ii) নং থেকে পাই, OP = OR ....(iii)

এবার, সমকোণী ত্রিভুজ Δ APO ও Δ ARO-এর মধ্যে,

∠OPA = ∠ORA [প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ]

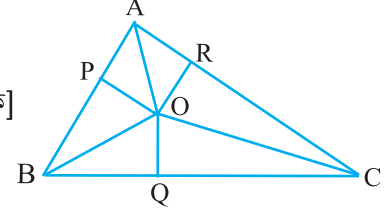
অতিভুজ AO সাধারণ বাহু

OP = OR [(iii) নং থেকে পাই]

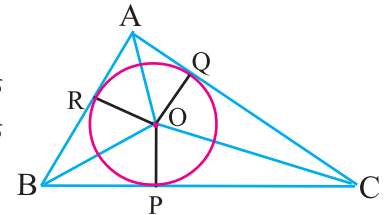
∴ Δ APO ≅ Δ ARO [সর্বসমতার R-H-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, ∠ PAO = ∠ RAO [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

∴ AO, ∠A-এর সমদ্বিখণ্ডক।

∴ Δ ABC-এর কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু। [প্রমাণিত]

উপরের উপপাদ্যটি যুক্তি সহকারে প্রমাণ করার সময় পেলাম, OP = OQ = OR; অর্থাৎ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OP-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি P,Q ও R বিন্দু দিয়ে যাবে।

এই বৃত্তকে কী বলা হয়?

O কে কেন্দ্র করে OP-এর সমান ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটিকে Δ ABC-এর **অন্তর্বৃত্ত** বলা হয়। OP কে **অন্তর্ব্যাসার্ধ** এবং বৃত্তের কেন্দ্র O-কে **অন্তঃকেন্দ্র** বলা হয়।

আমি সূক্ষ্মকোণী, সমকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজ আঁকি এবং ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডকগুলি এঁকে দেখি প্রতিক্ষেত্রে অন্তঃকেন্দ্র ত্রিভুজের কোথায় অবস্থিত। [নিজে করি]

আমি একটি যেকোনো ত্রিভুজ PQR আঁকি ও Δ PQR-এর কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু—যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি। [নিজে করি]

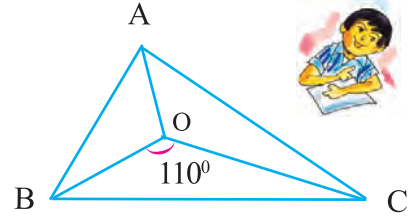
প্রয়োগ: 4 ABC ত্রিভুজের O অন্তঃকেন্দ্র। $\angle BOC = 110^\circ$ হলে, $\angle BAC$ এর পরিমাপ কত তা লিখি।

Δ OBC-তে $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$

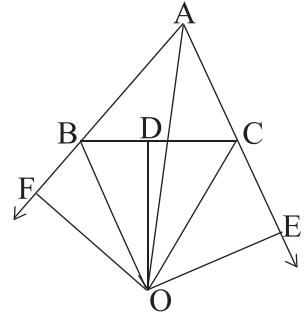
বা, $\angle OBC + \angle OCB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

বা, $2\angle OBC + 2\angle OCB = 140^\circ$

$\therefore \quad \angle ABC + \angle ACB = 140^\circ$

সুতরাং, $\angle BAC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

প্রয়োগ : 5 প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক এবং একটি কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর বহিঃসমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে BO এবং CO, O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A,O যুক্ত করি।

প্রমাণ করতে হবে যে: $\angle ABC$, $\angle ACB$ এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় এবং $\angle BAC$ -এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু। অর্থাৎ AO, $\angle BAC$ -এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক প্রমাণ করলেই প্রমাণিত হবে যে একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক এবং একটি কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

অঙ্কন : O বিন্দু থেকে BC, বর্ধিত AB এবং বর্ধিত AC বাহুর উপর যথাক্রমে OD, OF এবং OE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: Δ BOD ও Δ BOF -এর মধ্যে,

$\angle OBD = \angle OBF$ [BO, $\angle$ FBD-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle ODB = \angle OFB$ [প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ]

OB সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta BOD \cong \Delta BOF$ [A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore OD = OF$

অনুরূপে, $\Delta OCD \cong \Delta OCE$ $\quad \therefore OD = OE$ $\quad$ সুতরাং, $OE = OF$

সমকোণী Δ AOE ও Δ AOF -এর মধ্যে, $\angle AEO = \angle AFO$ [প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ]

অতিভুজ AO সাধারণ বাহু

$OE = OF$

$\therefore \quad \Delta AOE \cong \Delta AOF$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

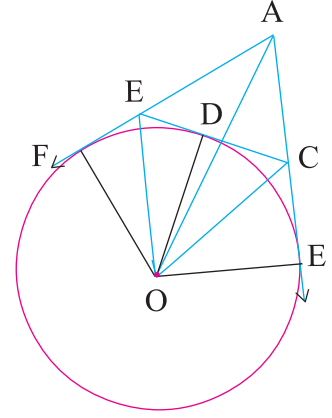
সুতরাং, $\angle OAE = \angle OAF$ $\therefore$ AO, $\angle$ BAC -এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক

$\therefore$ একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের বহিঃসমদ্বিখন্ডক এবং একটি কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

যেহেতু OD = OE = OF, সুতরাং O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OD দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি D, E, F বিন্দু দিয়ে যাবে।

এই ধরনের বৃত্তকে কি বলব?

এই ধরনের বৃত্তকে **বহির্বৃত্ত** বলে। OD, OE, OF, -কে **বহির্ব্যাসার্ধ** বলে। O -কে **বহিঃকেন্দ্র** বলে।

একটি ত্রিভুজে কটি বহিঃকেন্দ্র ও বহির্বৃত্ত পাওয়া যাবে [নিজে লিখি]।

একটি ত্রিভুজাকারক্ষেত্রের কতগুলি বিন্দু ত্রিভুজের বাহুগুলি থেকে সমদূরবর্তী তা নিজে লিখি।

আমরা হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করে ত্রিভুজের কী কী ধর্ম জানতে পেরেছি লিখি।

(i) ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

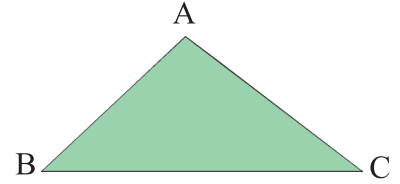
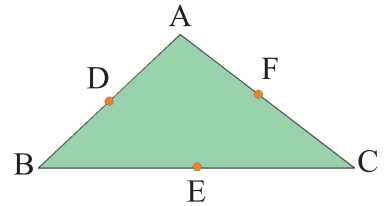
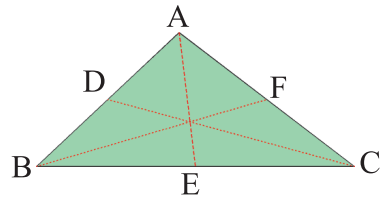
(ii) ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু।

(iii) ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তিনটি ☐।

কিন্তু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটিও কি সমবিন্দু হবে?

হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে যাচাই করি।

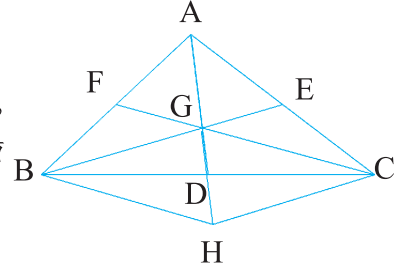
হাতেকলমে

(i) প্রথমে যে -কোনো একটি ত্রিভুজ ABC এঁকে কেটে নিয়ে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র পেলাম।

(ii) এবার Δ ABC-এর AB বাহুকে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু B বিন্দুর সঙ্গে মিলে যায় এবং ভাঁজ খুলে AB বাহুর মধ্যবিন্দু D পেলাম। একইভাবে কাগজ ভাঁজ করে Δ ABC-এর BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F পেলাম।

(iii) এবার কাগজ ভাঁজ করে AE, BF ও CD মধ্যমা পেলাম। দেখছি, Δ ABC-এর AE, BF ও CD মধ্যমা তিনটি পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

অর্থাৎ, **হাতেকলমে পেলাম,** Δ ABC-এর মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

আমি অন্য যে কোনো একটি ত্রিভুজ PQR এঁকে কেটে নিয়ে PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র পেলাম। এবার হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে যাচাই করি যে ΔPQR-এর মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য - 30 ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

ধরি, Δ ABC-এর BE ও CF মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, G যুক্ত করে বর্ধিত করা হলো। বর্ধিত AG, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

অর্থাৎ D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু প্রমাণ করলেই প্রমাণিত হবে যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

অঙ্কন: AD কে H বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যেন AG = GH হয়।

B, H এবং C, H যোগ করলাম।

প্রমাণ: ΔABH-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু F [প্রদত্ত]

AH বাহুর মধ্যবিন্দু G [অঙ্কনানুসারে]

∴ FG || BH [∵ ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।]

সুতরাং, GC || BH

আবার একইভাবে, ΔACH-এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু E [প্রদত্ত]

এবং AH বাহুর মধ্যবিন্দু G [অঙ্কনানুসারে]

∴ GE || HC; অর্থাৎ, BG || HC

∴ পেলাম, BGCH চতুর্ভুজের GC || BH এবং BG || HC

∴ BGCH একটি সামান্তরিক যার কর্ণ BC ও GH

∴ D, BC-এর মধ্যবিন্দু [∵ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

সুতরাং, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [প্রমাণিত]

দেখছি এই উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য BH, GC অর্থাৎ FG-এর সমান্তরাল হওয়ার প্রয়োজন। AG = GH না ধরে B বিন্দু দিয়ে FG-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ অঙ্কন করে যা বর্ধিত AD-কে H বিন্দুতে ছেদ করবে এবং H, C যোগ করব।

এইভাবেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারি। [নিজে করি]

কিন্তু যে বিন্দুতে ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি মিলিত হয়েছে তাকে কী বলা হয়?

যে বিন্দুতে ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি মিলিত হয়েছে তাকে **ভরকেন্দ্র** বলা হয়।

বুঝেছি, ΔABC-এর AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

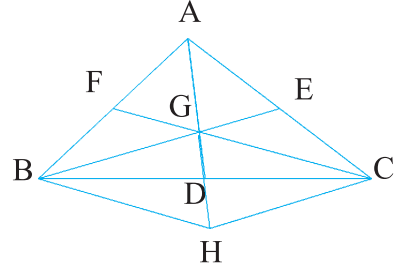
$\therefore$ G , ΔABC-এর **ভরকেন্দ্র**।

কিন্তু ভরকেন্দ্র G, AD মধ্যমাকে কী অনুপাতে বিভক্ত করে? অর্থাৎ AG : GD কী হবে হিসাব করে দেখি।

BGCH সামান্তরিকের BC ও GH কর্ণদুটি পরস্পরকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

$\therefore GD = \frac{1}{2} GH$ সুতরাং, $GH = 2GD$

অঙ্কনানুসারে, $AG = GH$ $\therefore AG = 2GD$

সুতরাং, $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ $\therefore AG : GD = 2 : 1$

একইভাবে দেখানো যায় যে, $BG : GE = 2 : 1$ এবং $CG : GF = 2 : 1$

অর্থাৎ যে-কোনো মধ্যমা শীর্ষবিন্দুর দিক থেকে ভরকেন্দ্রে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

আমি অন্যভাবে কী পাই দেখি, $AG = GH$

আবার, $AG + GD = AD$

বা, $GH + GD = AD$

বা, $2GD + GD = AD$

বা, $3GD = AD$

$\therefore GD = \frac{1}{3} AD$

এবং $AG = AD - GD$

$= AD - \frac{1}{3} AD = \frac{2}{3} AD$

একইভাবে পাব, $FG = \frac{1}{3} CF$

এবং $CG = \frac{2}{3} CF$

$EG = \frac{1}{3} BE$

এবং $BG = \frac{2}{3} BE$

$\therefore$ পেলাম, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

নিজে করি

(1) আমি PQR একটি ত্রিভুজ আঁকি ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ΔPQR-এর মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

(2) আমি সূক্ষ্মকোণী, সমকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজ আলাদা আলাদা এঁকে, তাদের ভরকেন্দ্র ত্রিভুজের কোথায় অবস্থিত দেখি।

প্রয়োগ : 6 ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমা দুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। BG ও CG-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q; P, F এবং Q, E যুক্ত করা হলো।

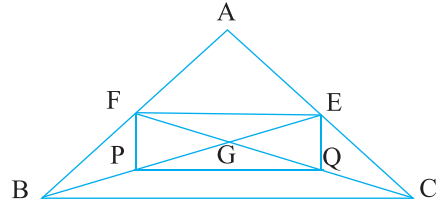
প্রমাণ করি যে, (i) PQEFএকটি সামান্তরিক

(ii) G বিন্দু BE ও CF কে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করে

প্রদত্ত : ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমা দুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। BG ও CG-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

P, F এবং Q, E যুক্ত করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) PQEFএকটি সামান্তরিক

(ii) G বিন্দু BE ও CF কে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করে

প্রমাণ : ΔABC-এর AB ও AC বাহুদুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E

$\therefore FE \parallel BC$ ও $FE = \frac{1}{2}BC$

আবার, ΔGBC-এর GB ও GC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

$\therefore PQ \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2} BC$

যেহেতু, PQEF চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল,

সুতরাং, PQEF একটি সামান্তরিক [(i) নং প্রমাণিত]

PQEF সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ PG = GE এবং QG = GF [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

সুতরাং, BP = PG = GE

$\therefore$ G বিন্দু BE মধ্যমাকে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

আবার, CQ = QG = GF

$\therefore CG : GF = 2:1$

সুতরাং, G বিন্দু CF মধ্যমাকে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে। [(ii) প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 7 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হবে।

প্রদত্ত: ধরি, ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমাদুটি সমান।

প্রমাণ করতে হবে যে: ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ: মনে করি, BE ও CF মধ্যমাদুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে।

যেহেতু ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে,

$\therefore EG = \frac{1}{3}BE$ এবং $FG = \frac{1}{3}CF$

কিন্তু, $BE = CF$ $\quad \therefore EG = FG$ ——— (i)

এবং $BG = CG$ ——— (ii)

এখন, ΔFGB ও ΔEGC-এর মধ্যে,

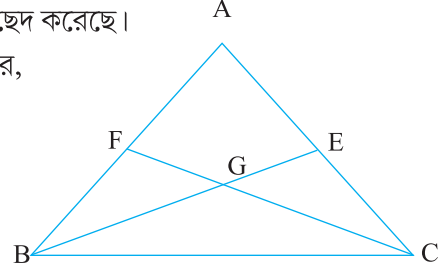
$BG = CG$ [(ii) থেকে পেলাম]

$\angle FGB =$ বিপ্রতীপ $\angle EGC$

এবং $FG = EG$ [(i) থেকে পেলাম]

$\therefore \Delta FGB \cong \Delta EGC$ [S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে]

সুতরাং, $BF = CE$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

বা, $2BF = 2CE$ $\quad \therefore AB = AC$; সুতরাং, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 8 ΔABC-এর মধ্যমা তিনটি AD,BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।
প্রমাণ করি যে, (i) $\Delta GBC = \frac{1}{3}\Delta ABC$ (ii) $\Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC$

প্রদত্ত: ΔABC-এর তিনটি মধ্যমা AD,BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $\Delta GBC = \frac{1}{3}\Delta ABC$ (ii) $\Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC$

প্রমাণ: ΔABC-এর AD মধ্যমা,

$\therefore \Delta ABD = \Delta ACD$ ——— (i) ($\because$ ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে)

আবার, ΔGBC-এর GD মধ্যমা,

$\therefore \Delta GBD = \Delta GCD$ ——— (ii)

(i) – (ii) থেকে পাই,

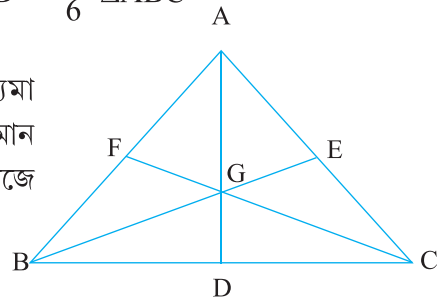
$\Delta ABD - \Delta GBD = \Delta ACD - \Delta GCD$

$\therefore \Delta AGB = \Delta AGC$

একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta AGB = \Delta BGC$

$\therefore \Delta AGB = \Delta BGC = \Delta AGC = \frac{1}{3}(\Delta AGB + \Delta BGC + \Delta AGC) = \frac{1}{3}\Delta ABC$ [(i) প্রমাণিত]

আবার, $\Delta GBD = \frac{1}{2}\Delta BGC$ [$\because$ ΔBGC-এর GD মধ্যমা]

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\Delta ABC)$ $\quad \therefore \Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC$ [(ii) প্রমাণিত]

কষে দেখি - 17

1. ABC ত্রিভুজে $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তসমদ্বিখণ্ডক I বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি, $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$
2. একটি ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য সমান হলে প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজটি সমবাহু।
3. প্রমাণ করি যে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমাপতিত হয়।
4. ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমা। প্রমাণ করি যে, ABC ও DEF ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র একই বিন্দু।
5. প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের দুটি মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় মধ্যমার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।
6. ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমা। প্রমাণ করি যে,
   (i) $4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$ (ii) $3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$
7. ΔABC-এর AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। ΔABC-এর ক্ষেত্রফল 36 বর্গ সেমি. হলে, (i) ΔAGB-এর ক্ষেত্রফল (ii) ΔCGE-এর ক্ষেত্রফল (iii) চতুর্ভুজ BDGF-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।
8. ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমা। যদি $\frac{2}{3}AD = BC$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, অপর দুটি মধ্যমার অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ 90°।
9. ABCD সামান্তরিকের BC এবং CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q ; AP এবং AQ কর্ণ BD-কে যথাক্রমে K ও L বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $BK = KL = LD$
10. **বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)**

(i) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O ; $\angle BOC = 80^\circ$ হলে, $\angle BAC$-এর পরিমাপ
(a) 40° (b) 160° (c) 130° (d) 110°

(ii) ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O ; $\angle BAC = 40^\circ$ হলে, $\angle BOC$-এর পরিমাপ
(a) 80° (b) 140° (c) 110° (d) 40°

(iii) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O ; $\angle BAC = 40^\circ$ হলে, $\angle BOC$-এর পরিমাপ
(a) 80° (b) 110° (c) 140° (d) 40°

(iv) ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G; GBC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 12 বর্গ সেমি. হলে, ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
(a) 24 বর্গ সেমি. (b) 6 বর্গ সেমি. (c) 36 বর্গ সেমি. (d) কোনোটিই নয়

(v) ABC সমকোণী ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য
(a) 2.5সেমি. (b) 10সেমি. (c) 5 সেমি. (d) কোনোটিই নয়।

11. **সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন।**

(i) একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি, 8 সেমি. ও 10 সেমি. হলে, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের কোথায় অবস্থিত তা লিখি।

(ii) ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা এবং G ভরকেন্দ্র। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ সেমি. হলে AG-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) একটি ত্রিভুজের কয়টি বিন্দু ত্রিভুজের বাহুগুলি থেকে সমদূরবর্তী তা লিখি।

(iv) ABC সমবাহু ত্রিভুজের পাদ ত্রিভুজ DEF; $\angle FDA$ -এর পরিমাপ কত তা লিখি।

(v) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle ABC = \angle ACB$ এবং মধ্যমা $AD = \frac{1}{2}BC$। যদি $AB = \sqrt{2}$ সেমি. হয়, তাহলে ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

18 বৃত্তের ক্ষেত্রফল
(AREA OF CIRCLE)

আমরা দৌড় প্রতিযোগিতার জন্য রবীন্দ্রনগরের বড়ো মাঠে অনেকগুলি এককেন্দ্রীয় বৃত্তাকার পথ তৈরি করেছি। এবার আমরা ঠিক করেছি যে মাঠের মাঝের বৃত্তাকার জায়গাটি রং করব। কতটা জায়গা রং করব হিসাব করি।

কতটা বৃত্তাকার জায়গা রং করব তার জন্য ওই বৃত্তাকার জায়গার [ ] [পরিধি/ক্ষেত্রফল] জানতে হবে।

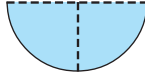
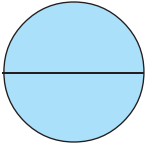
মেপে দেখছি, বৃত্তাকার জায়গাটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 196 সেমি.।

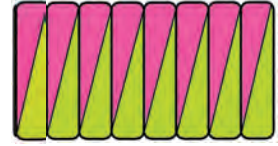
$\therefore$ বৃত্তাকার জায়গাটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = [ ] সেমি.।

কিন্তু বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কীভাবে মাপব?

হাতেকলমে আমরা বৃত্তাকার চাকতি তৈরি করে হাতেকলমে চাকতির ক্ষেত্রফল মাপার চেষ্টা করি।

আমরা একই ব্যাসার্ধ নিয়ে অর্থাৎ একই মাপের 2টি বৃত্তাকার চাকতি মোটা কাগজ দিয়ে তৈরি করেছি।

(1) বৃত্তাকার চাকতি দুটি নীচের ছবির মতো ভাঁজ করলাম,

(2) বৃত্তাকার চাকতি দুটির ভাঁজ খুলে দিলাম এবং প্রত্যেকটি চাকতির16 টি খণ্ড পাশের ছবির মতো রঙিন করলাম। একটি বৃত্তাকার চাকতিপিচবোর্ডে আটকে দিলাম।

(3) অন্য বৃত্তাকার চাকতির 16 টি রঙিন খণ্ড কেটে পাশের ছবির মতো পিচবোর্ডে আটকালাম।

16 টি খণ্ড সাজানোর পরে প্রায় আয়তক্ষেত্র পাচ্ছি। বৃত্তাকার চাকতির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক

এই আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য= $\frac{1}{2}$ × বৃত্তের পরিধি = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ একক= [ ] একক

বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য =r একক ধরলে, এই আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = r একক

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\pi r \times r$ বর্গ একক = [ ] বর্গ একক

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\pi \times$ (ব্যাসার্ধ)^2

1 আমরা 98 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের যে বৃত্তাকার জায়গা সিমেন্ট দিয়ে বাঁধাব তার ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

বৃত্তাকার জায়গাটির ক্ষেত্রফল= $\pi \times (98)^2$ বর্গ সেমি. = $\frac{22}{7} \times 98 \times 98$ বর্গ সেমি. = [ ] বর্গ সেমি.

2 যে বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 28 সেমি., তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য = 28 সেমি.

ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = [ ] সেমি.

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

সুতরাং, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7} \times 14^2$ বর্গ সেমি. = $\frac{22}{7} \times 14 \times 14$ বর্গ সেমি. = 616 বর্গ সেমি.

3 যে বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 42 সেমি. তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

4 যে বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1386 বর্গ মিটার তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ মিটার

$= \frac{22}{7} r^2$ বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} r^2 = 1386$

বা, $r^2 = 1386 \times \frac{7}{22} = 63 \times 7$

বা, $r^2 = 7 \times 9 \times 7$

বা, $r = \sqrt{7 \times 3 \times 3 \times 7}$

বা, $r = 7 \times 3$

$\therefore r = 21$

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 21 মিটার।

5 যে বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ মিটার 54 বর্গ ডেসিমিটার,তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।(নিজে করি)

6 আমাদের পাড়ার বৃত্তাকার পার্কের পরিধি 264 মিটার। হিসাব করে পার্কের ক্ষেত্রফল লিখি।

ধরি, বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে, $2\pi r = 264$

$\therefore r = \square$

বৃত্তাকার পার্কের ক্ষেত্রফল $= \pi \times r^2$ বর্গ মিটার

$= \frac{22}{7} \times 42 \times 42$ বর্গ মিটার $= \square$ বর্গ মিটার

7 যে বৃত্তাকার জমির পরিধি 44 মিটার, তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

8 আমাদের পাড়ার ক্লাব ঘরে বলয়াকৃতি একটি লোহার পাত আছে যার ভিতরের ও বাহিরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 18 সেমি. এবং 32 সেমি.। বলয়টিতে কত বর্গ সেমি. লোহার পাত আছে ছবি এঁকে হিসাব করি।

বলয়াকৃতি লোহার পাতের ভিতরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 18 সেমি.

$\therefore$ ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 9 সেমি.

$\therefore$ বলয়াকৃতি লোহার পাতের ভিতরের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7}(9)^2$ বর্গ সেমি.

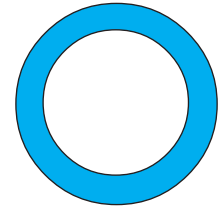
বলয়াকৃতি লোহার পাতের বাহিরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 32 সেমি.

$\therefore$ বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = 16 সেমি.

$\therefore$ বলয়াকৃতি লোহার পাতের বাহিরের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7}(16)^2$ বর্গ সেমি.

$\therefore$ বলয়টিতে লোহা আছে $\left[\frac{22}{7}(16)^2 - \frac{22}{7}(9)^2 \right]$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7}[16^2 - 9^2]$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7} \times (16 + 9)(16 - 9)$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

9 যদি লোহার বলয়টির ভিতরের ও বাহিরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 70 সেমি. ও 42 সেমি. হতো, তাহলে বলয়টিতে কত বর্গ সেমি. লোহার পাত থাকত হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

10 সোমাদের পাড়ার বৃত্তাকার মাঠের বাইরে চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির বাইরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য ভিতরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 132 মিটার বেশি এবং পথটির ক্ষেত্রফল 9702 বর্গ মিটার। হিসাব করে মাঠটির ক্ষেত্রফল লিখি।

ধরি, রাস্তাবাদে মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার এবং রাস্তাসহ মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R মিটার।

$\therefore$ রাস্তা বাদে মাঠের পরিধি = $2\pi r$ মিটার এবং রাস্তা বাদে মাঠের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ মিটার।

আবার, রাস্তাসহ মাঠের পরিধি = ☐ মিটার

এবং ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, $2\pi R - 2\pi r = 132$ ———— (i)

এবং $\pi R^2 - \pi r^2 = 9702$ ———— (ii)

(i) থেকে পাই, $2\pi R - 2\pi r = 132$

বা, $2\pi (R - r) = 132$

বা, $2 \times \frac{22}{7} (R - r) = 132$

বা, $R - r = 132 \times \frac{7}{2 \times 22}$

$\therefore$ $R - r = 21$ ———— (iii)

আবার (ii) থেকে পাই, $\pi R^2 - \pi r^2 = 9702$

বা, $\pi (R^2 - r^2) = 9702$

বা, $R^2 - r^2 = 9702 \times \frac{7}{22}$

বা, $(R+r)(R-r) = 441 \times 7$

বা, $(R+r) \times 21 = 441 \times 7$ [(iii) থেকে পাই]

বা, $(R+r) = \frac{441 \times 7}{21}$

$\therefore$ $R + r = 147$ ------------- (iv)

(iii) ও (iv) থেকে পেলাম,

$R + r$ = ☐

এবং $R - r$ = ☐

অপনয়ন পদ্ধতির সাহায্যে R ও r -এর মান নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

$R + r = 147$

$R - r = 21$

$2R = 168$

$R = \frac{168}{2}$ = ☐

আবার, $R+r = 147$

$\therefore r = 147 - 84$

সুতরাং, $r = 63$

সুতরাং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 84 মিটার এবং রাস্তাবাদে বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 63 মিটার।

$\therefore$ সোমাদের বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7} \times 63 \times 63$ বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার

11 যদি বৃত্তাকার মাঠে সমান চওড়া রাস্তাটির বাইরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য ভিতরের সীমারেখার দৈর্ঘ্যের থেকে 220 মিটার বেশি হতো এবং পথটির ক্ষেত্রফল 19250 বর্গ মিটার হতো, তাহলে বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল কত হতো হিসাব করে লিখি [নিজে করি]

12 সীমা একটি বৃত্ত আঁকল। সে ওই বৃত্তের একটি পরিলিখিত বর্গক্ষেত্র আঁকল। বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি. হলে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.।

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 154$

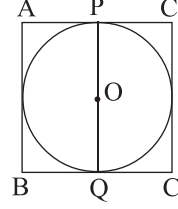
বা, $r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$

$\therefore \quad r = 7$

সুতরাং, $2r = 14$

এক্ষেত্রে, বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 14 সেমি.।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 14×14 বর্গ সেমি. = 196 বর্গ সেমি.

13 আয়েশা ওই বৃত্তের একটি অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র আঁকল। আয়েশার আঁকা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.।

বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাস।

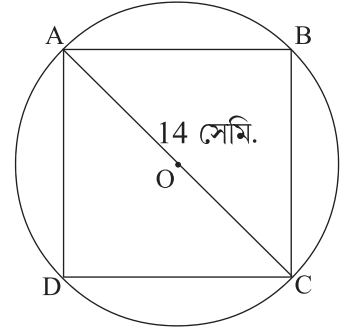
সুতরাং, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.।

ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x সেমি.

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $x^2 + x^2 = 14^2$

বা, $2x^2 = 196$

বা, $x^2 = \frac{196}{2}$ $\quad \therefore x^2 = 98$

সুতরাং, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 98 বর্গ সেমি.।

14 পীযুষ একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকল যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। আবুল ওই ত্রিভুজের একটি পরিবৃত্ত আঁকল। পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

সমবাহু ত্রিভুজটির উচ্চতা $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$ সেমি. = $3\sqrt{3}$ সেমি.

অর্থাৎ, লম্ব AD = $3\sqrt{3}$ সেমি.

সমবাহু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র O ত্রিভুজের উচ্চতা AD -এর উপর অবস্থিত। $AO = \frac{2}{3}AD$

সুতরাং, $AO = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3}$ সেমি.

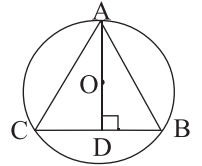
$\therefore AO = 2\sqrt{3}$ সেমি.

সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য AO

সুতরাং, ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{3}$ সেমি.

পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2 [যেখানে r বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য]

$= \frac{22}{7} \times (2\sqrt{3})^2$ বর্গ সেমি.

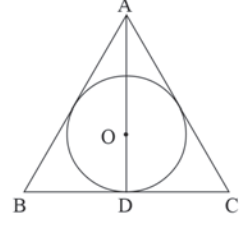
$= \frac{22}{7} \times 4 \times 3$ বর্গ সেমি. $= \frac{264}{7}$ বর্গ সেমি. $= 37\frac{5}{7}$ বর্গ সেমি.

15 যদি আবুল ওই সমবাহু ত্রিভুজের একটি অন্তর্বৃত্ত আঁকত, তাহলে ওই অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত হতো তা হিসাব করি।

সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য OD

$OD = \frac{1}{3}\ AD \quad \therefore OD = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3}$ সেমি. $= \sqrt{3}$ সেমি.

$\therefore$ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\sqrt{3}$ সেমি.

অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi(\sqrt{3})^2$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7} \times 3$ বর্গ সেমি. $= \frac{66}{7}$ বর্গ সেমি. $= 9\frac{3}{7}$ বর্গ সেমি.

16 একটি ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডের পরিসীমা 24 মিটার এবং ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের পরিধি 44 মিটার হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত হিসাব করে দেখি।

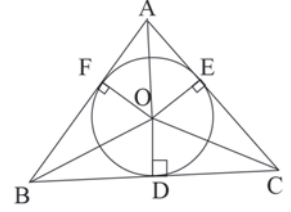
ধরি, ABC একটি ত্রিভুজ যার পরিসীমা 24 মিটার। AO, BO এবং CO যথাক্রমে $\angle BAC, \angle ABC$ ও $\angle ACB$ -এর অন্তঃসমদ্বিণ্ডক। অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। O বিন্দু থেকে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব যথাক্রমে OD,OE এবং OF; OD = OE = OF

সুতরাং, ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য OD; ধরি, অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে,

$2\pi r = 44$

বা, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

বা, $r = \frac{44 \times 7}{44} \qquad \therefore r = 7$

ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $=$ ΔBOC-এর ক্ষেত্রফল $+$ ΔCOA -এর ক্ষেত্রফল $+$ ΔAOB -এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}.BC.\ r + \frac{1}{2}.CA.\ r + \frac{1}{2}.AB.r$

$= \frac{1}{2}.(BC + CA + AB)\ .r$ বর্গ মিটার

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7$ বর্গমিটার $= 84$ বর্গ মিটার

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 84 বর্গ মিটার

17 একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সেমি ., 12 সেমি. ও 15 সেমি.। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = (15)^2$ সুতরাং, ত্রিভুজটি সমকোণী।

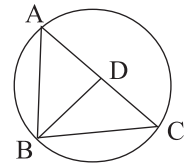
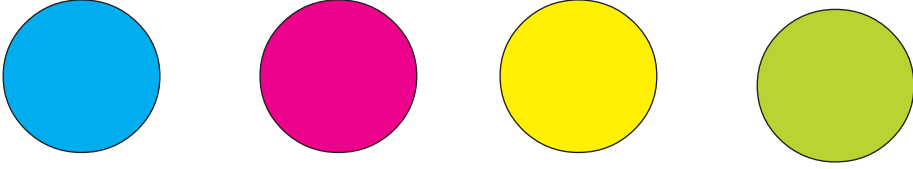
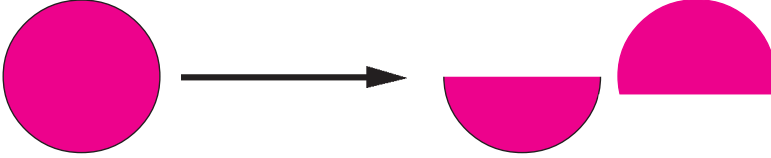
ত্রিভুজের AB = 9 সেমি., BC = 12 সেমি. এবং CA = 15 সেমি.

$\therefore \quad \angle ABC = 90^\circ$

ধরি, BD, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা। BD = AD = DC

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{15}{2}$ সেমি.

সুতরাং, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\pi \times (\frac{15}{2})^2$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{225}{4}$ বর্গ সেমি. $= 176\frac{11}{14}$ বর্গ সেমি.

রফিকুল ও মেহের একই মাপের অনেকগুলি নানান রঙের বৃত্তাকার চাকতি তৈরি করেছে।

আমার বোন লাল রঙের বৃত্তটি সমান দু-ভাঁজ করে কাঁচি দিয়ে কেটে সমান দু-ভাগ করল অর্থাৎ দুটি অর্ধবৃত্ত পেল।

18 প্রতিটি বৃত্তাকার চাকতির অর্ধপরিধি ও অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রতিটি বৃত্তাকার চাকতির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

$\therefore$ প্রতিটি বৃত্তাকার চাকতির পরিধি ☐ [$2\pi r/\pi r^2$] একক ।

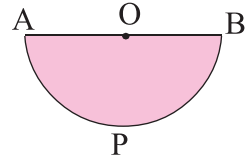
বৃত্তাকার চাকতিটির কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি 360°

$\therefore$ APB অর্ধবৃত্তাকার চাকতির $\angle AOB = 180°$ ।(যেখানে O, বৃত্তাকার চাকতির কেন্দ্র)

আমরা জানি, চাপের দৈর্ঘ্য ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল সমানুপাতী।

সুতরাং, $\dfrac{\overset{\frown}{APB} \text{ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \dfrac{180}{360}$

$\therefore$ $\overset{\frown}{APB}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{180}{360} \times$ বৃত্তের পরিধি

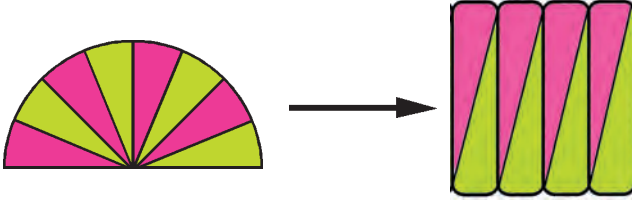
$= \dfrac{1}{2} \times 2\pi r$ একক$= \pi r$ একক, যেখানে অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

অন্যভাবে, কেন্দ্রে 360° কোণ করলে বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ একক।

1° কোণ উৎপন্ন করা বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2\pi r}{360}$ একক।

180° কোণ উৎপন্ন করা বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2\pi r}{360} \times 180$ একক।

$= \pi r$ একক।

হাতেকলমে অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করি।

আমি অর্ধবৃত্তাকার কাগজটিকে কতগুলি সমান ভাঁজ করে খুলে দিলাম এবং ভাঁজগুলি কেটে নীচের মতো সাজালাম।

প্রায় যে আয়তক্ষেত্র পেলাম তার দৈর্ঘ্য $\frac{\pi r}{2}$ একক

এবং প্রস্থ r একক

হাতে কলমে অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পেলাম $\frac{\pi r}{2} \times r$ বর্গ একক

$= \frac{\pi r^2}{2}$ বর্গ একক

19 আমি অন্যভাবে অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করি।

$\frac{\text{অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{180}{360}$ (আমরা জানি, ক্ষেত্রফল ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল সমানুপাতী)

বা, অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{180}{360} \times$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\pi r^2}{2}$ বর্গ একক

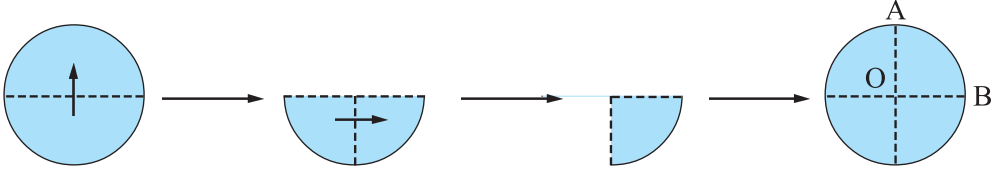
অন্যভাবে, কেন্দ্রে 360° কোণের জন্য বৃত্তাকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক।

কেন্দ্রে 1° কোণের জন্য উৎপন্ন বৃত্তকলাটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2}{360}$ বর্গ একক।

কেন্দ্রে 180° কোণের জন্য অর্ধবৃত্তকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2 \times 180}{360}$ বর্গ একক।

$\therefore$ অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{180}{360} \times \pi r^2$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \pi r^2$ বর্গ একক

মেহেরের ভাই এসে নীল রঙের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি নীচের মতো সমান চার ভাঁজ করে খুলে ফেলল ।

দেখছি, নীল রঙের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি চারটি সমান ভাগে বিভক্ত হয়ে চারটি বৃত্তকলা তৈরি হয়েছে।

20 AOB বৃত্তকলার কেন্দ্রের কোণ মেপে AB চাপের দৈর্ঘ্য কত দেখি, যেখানে বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

দেখছি, AOB বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে 90^0 কোণ করেছে।

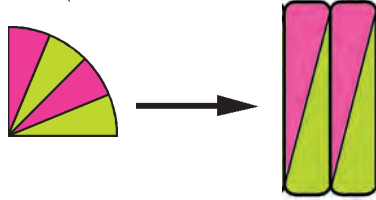
$$\frac{\overset{\frown}{AB} \text{ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{90}{360}$$ [∵ চাপের দৈর্ঘ্য ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল সমানুপাতী।]

$$\therefore \overset{\frown}{AB} \text{ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য} = \frac{90}{360} \times \text{ বৃত্তের পরিধি}$$

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r \text{ একক}$$ [∵ বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r একক]

$$= \frac{\pi r}{2} \text{ একক}$$

21 আমি হাতে কলমে AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল কত দেখি।

আমি AOB বৃত্তকলাটি কেটে নিয়ে নীচের মতো দু-বার সমান ভাঁজ করে সবুজ ও লাল রং করলাম এবং ভাঁজগুলি খুলে দিলাম। এবার ভাঁজগুলি কেটে নীচের মতো সাজালাম।

প্রায় আয়তক্ষেত্রের মতো পেলাম যার দৈর্ঘ্য $\frac{\pi r}{4}$ একক এবং প্রস্থ r একক।

$\therefore$ AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = AOB বৃত্তকলার দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$$= \frac{\pi r}{4} \times r \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{\pi r^2}{4} \text{ বর্গ একক}$$

আমি অন্যভাবে কেন্দ্রের কোণ মেপে AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

$$\frac{\text{AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{90}{360}$$

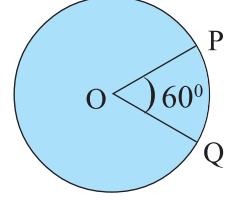
$$\therefore \text{AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{90}{360} \times \text{ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \boxed{} \text{ বর্গ একক}$$

রফিকুল নীল রঙের বৃত্তাকার ক্ষেত্র থেকে একটি বৃত্তকলা POQ কাটল, যেটি কেন্দ্রে 60^0 কোণ করেছে।

22 আমি হিসাব করে PQ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

$$\frac{\overset{\frown}{PQ}\text{ -এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore \overset{\frown}{PQ}\text{ -এর দৈর্ঘ্য} = \frac{60}{360} \times \text{ বৃত্তের পরিধি}$$

আবার, $$\frac{\text{POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore \text{POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{60}{360} \times \text{ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$\therefore$ যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হয় এবং ওই বৃত্তের কোনো বৃত্তকলা কেন্দ্রে θ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে থাকে,

তাহলে ওই বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{\theta}{360} \times$ বৃত্তের পরিধি

$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ একক

ওই বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ বর্গ একক

23 অর্ধবৃত্তাকার একটি পার্ককে বেড়া দিয়ে ঘিরতে 144 মিটার রেলিং লাগে। পার্কটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

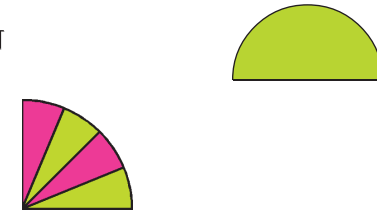
ধরি, অর্ধবৃত্তাকার পার্কটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

পার্কটির পরিসীমা $= (\pi r + 2r)$ মিটার

শর্তানুসারে, $\pi r + 2r = 144$

বা, $\frac{22}{7} r + 2r = 144$

বা, $\frac{36r}{7} = 144$

$\therefore$ r = ☐ [নিজে করি]

$\therefore$ পার্কটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \pi \times r^2$ বর্গ মিটার

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28$ বর্গ মিটার

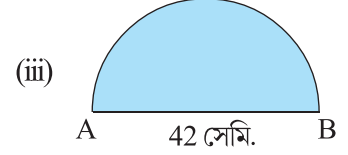
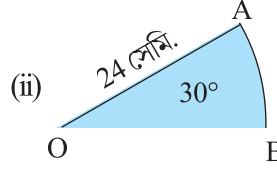
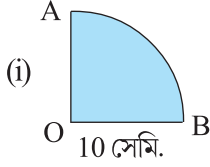
= ☐ বর্গ মিটার [নিজে করি]

24 যদি অর্ধবৃত্তাকার পার্কটির পরিসীমা 108 মিটার হয়, তাহলে পার্কটির ক্ষেত্রফল কত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

25 আমি নীচের বৃত্তকলাগুলির AB বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য হিসাব করি ও বৃত্তকলাগুলির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

(i)

(ii)

(iii)

(i) $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{90}{360} \times 2 \times \pi \times 10$ সেমি.

[$\because$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= 10$ সেমি. এবং $\angle AOB = 90°$]

$= \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 10$ সেমি.

$= \square$ সেমি.

$\therefore$ AOB বৃত্তকলার পরিসীমা $= \overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ 2 \times$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

$= (15.7$ সেমি. $+ 2 \times 10$ সেমি.$)$ (প্রায়)

$= 35.7$ সেমি.(প্রায়)

AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{90}{360} \times \pi \times (10)^2$ বর্গ সেমি.

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

(ii) $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{30}{360} \times \square$

$= \frac{30}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 24$ সেমি.

$= \square$ সেমি. [নিজে হিসাব করি]

$\therefore$ AOB বৃত্তকলার পরিসীমা $= \overset{\frown}{AB}$-এর দৈর্ঘ্য $+ 2 \times$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

$= (12.57 + 48)$ সেমি.(প্রায়) $= \square$ সেমি.(প্রায়)

AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\square}{360} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 24 \times 24$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

আমি (iii) নং ছবির $\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য, পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

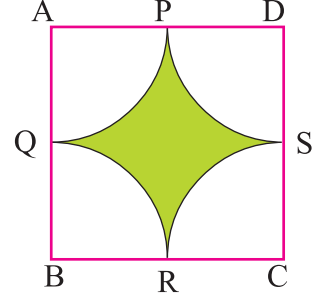
26 মধুমিতাদের বর্গাকার বাগানের চারটি কোণে চারটি সমান মাপের ফুলের বাগান রেখে মাঝের বাকি অংশে কাঁচা আনাজের চাষ করেছে। যদি প্রতিটি ফুলের বাগান 3.5 মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার ক্ষেত্রের অংশ হয় তবে ছবি এঁকে বাগানের মাঝের কাঁচা আনাজের চাষের জায়গার পরিসীমা ও বাগানের ক্ষেত্রফল এবং বাগানের কতটা জায়গায় ফুলের চাষ হয়েছে এবং কতটা জায়গায় কাঁচা আনাজের চাষ হয়েছে হিসাব করে লিখি।

ধরি, ABCD মধুমিতাদের বর্গাকার বাগান এবং A,B,C ও D চারটি 3.5 মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্র।

$\therefore$ A কেন্দ্রীয় বৃত্তের APQ বৃত্তকলা ফুল বাগান।

অনুরূপে, B, C ও D কেন্দ্রীয় বৃত্তের যথাক্রমে BQR, CRS ও DSP বৃত্তকলাগুলি ফুল বাগান।

$\overset{\frown}{PQ}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{90}{360} \times$ বৃত্তের পরিধি

$=$ ☐ মিটার

$\therefore$ কাঁচা আনাজ তৈরির ক্ষেত্রের পরিসীমা $= \overset{\frown}{PQ}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ \overset{\frown}{QR}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ \overset{\frown}{RS}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ \overset{\frown}{SP}$ -এর দৈর্ঘ্য

$= 4 \times \overset{\frown}{PQ}$ -এর দৈর্ঘ্য [যেহেতু প্রতিটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান]

$= 4 \times \frac{11}{2}$ মিটার $=$ ☐ মিটার

বাগানের ক্ষেত্রফল $= (AD)^2 = (2 \times 3.5)^2$ বর্গ মিটার $= 49$ বর্গ মিটার

বাগানের কতটা জায়গায় ফুলের চাষ হয়েছে ও কতটা জায়গায় কাঁচা আনাজের চাষ হয়েছে হিসাব করি।

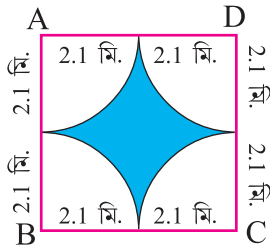
APQ, BQR, CRS ও DPS বৃত্তকলাগুলির মোট ক্ষেত্রফল জুড়ে ফুলের চাষ হয়েছে।

APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$ বর্গ মিটার $=$ ☐ বর্গ মিটার

$\therefore$ ফুলের চাষ হয়েছে $= 4 \times$ APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= 4 \times \frac{77}{8}$ বর্গ মিটার $=$ ☐ বর্গ মিটার

$\therefore$ কাঁচা আনাজের চাষের জন্য জমির ক্ষেত্রফল $(49 - 38.5)$ বর্গ মিটার $=$ ☐ বর্গ মিটার

27 আমি নীচের চিত্রের রঙিন জায়গার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

28 নীচের ছবির মতো একটি অর্ধবৃত্তাকার মাঠের মধ্যে ত্রিভুজাকার জমিতে অরূপবাবু বাড়ি তৈরি করেছেন। ত্রিভুজাকার জমির দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার, 16 মিটার এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90^0 হলে, বাড়ি করার পরে কতটুকু জমি পড়ে রইল তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

অরুণবাবু ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার জমিতে বাড়ি করেছেন।

আমি প্রথমে অর্ধবৃত্তাকার মাঠের ব্যাস AB-এর দৈর্ঘ্য মাপার চেষ্টা করি। অর্ধবৃত্তাকার মাঠটি যে বৃত্তাকার মাঠের অংশ তার কেন্দ্র O

ABC সমকোণী ত্রিভুজের, AC = 12 মিটার

এবং BC = 16 মিটার।

পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (12^2 + 16^2)$ বর্গ মিটার

$\therefore$ AB = ☐ মিটার

$\therefore$ অর্ধবৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{AB}{2} = 10$ মিটার।

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য = ☐ মিটার [নিজে করি]

$\therefore$ অরুণবাবুর বাড়ি বাদে বাকি জমির পরিসীমা = $\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য + 12 মিটার + 16 মিটার

= (31.4 মিটার + 28 মিটার) (প্রায়)

= 59.4 মিটার (প্রায়)

অরুণবাবুর বাড়ি করা জমির অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16$ বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার

$\therefore$ অরুণবাবুর বাড়ি বাদে বাকি জমির ক্ষেত্রফল = অর্ধবৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল – ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার জমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$ বর্গ মিটার – 96 বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার।

29 হাসান 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে কেটেছে। সে ওই বৃত্তকে সমান চার ভাঁজ করে একটি টুকরো কেটে পিচবোর্ডে আটকালো। রাবেয়া ওই বৃত্তাকার টুকরোর উপর পাশের ছবির মতো নকশা করল। রাবেয়া যতটা জায়গায় নকশা করল তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

$\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য = ☐ সেমি.

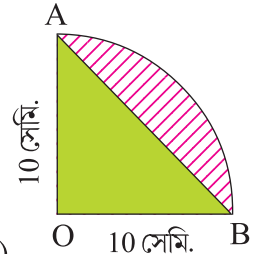
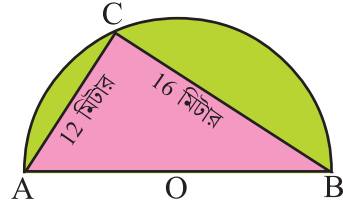
$\therefore$ AB -এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{10^2 + 10^2}$ সেমি. = ☐ সেমি.

$\therefore$ নকশার জায়গার পরিসীমা $= (15.7 + 10\sqrt{2})$ সেমি.

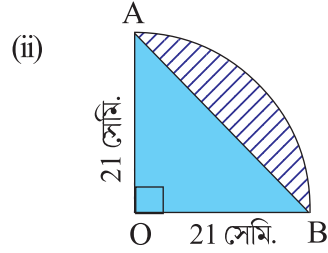
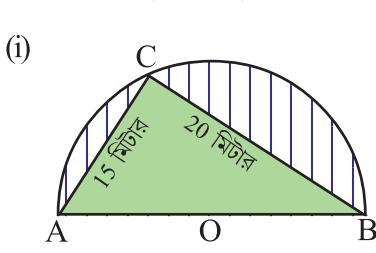
$= (15.7 + 10 \times 1.41)$ সেমি. $[\sqrt{2} \approx 1.41]$

$= (15.7 + 14.1)$ সেমি. (প্রায়) = 29.8 সেমি.(প্রায়)

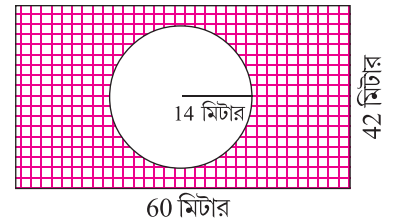
রাবেয়ার নকশার ক্ষেত্রফল = AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – Δ AOB -এর ক্ষেত্রফল

= ☐ বর্গ সেমি. [নিজে লিখি]

30 আমি নীচের বৃত্তকলাগুলির নকশার জায়গার (Shaded area) পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি

(i)

(ii)

কষে দেখি–18

1. আমিনাবিবি আজ 2.1 মিটার লম্বা একটি দড়ি দিয়ে তার গোরুটিকে ফাঁকা মাঠে খুঁটির সঙ্গে বাঁধলেন। হিসাব করে দেখি গোরুটি সবথেকে বেশি কতটা জমির ঘাস খেতে পারবে।
2. সুহানা একটি বৃত্ত আঁকবে যার পরিধি হবে 35.2 সেমি। হিসাব করে দেখি সুহানা যে বৃত্ত আঁকবে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত নেবে এবং বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত হবে।
3. রেখার দিদিমা একটি গোলাকার টেবিলের ঢাকনা তৈরি করেছেন যার ক্ষেত্রফল 5544 বর্গ সেমি। তিনি এই টেবিলের ঢাকনার চারিদিকে রঙিন ফিতে লাগাতে চান। হিসাব করে দেখি দিদিমাকে কত দৈর্ঘ্যের রঙিন ফিতে কিনতে হবে।
4. আমাদের পাড়ার বৃত্তাকার খেলার মাঠটি বেড়া দিয়ে ঘিরতে প্রতি মিটার 21 টাকা হিসাবে 924 টাকা খরচ হয়েছে। মাঠটি ত্রিপল দিয়ে ঢেকে দেওয়ার জন্য কত বর্গ মিটার ত্রিপল কিনতে হবে হিসাব করে লিখি।
5. ফারুক একটি বৃত্ত আঁকবে যার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে 616 বর্গ সেমি। হিসাব করে দেখি ফারুক যে বৃত্ত আঁকবে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত নেবে এবং বৃত্তটির পরিধি কত পাবে।
6. পলাশ ও পিয়ালী দুটি বৃত্ত এঁকেছে যাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অনুপাত 4 : 5; হিসাব করে দুজনের আঁকা বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত লিখি।
7. সুমিত ও রেবা একই দৈর্ঘ্যের দুটি তামার তার এনেছে। সুমিত ওই তারটি বেঁকিয়ে আয়তাকার চিত্র তৈরি করেছে যার দৈর্ঘ্য 48 সেমি. এবং প্রস্থ 40 সেমি.। কিন্তু রেবা একই দৈর্ঘ্যের তামার তারটি বেঁকিয়ে বৃত্ত তৈরি করল। হিসাব করে দেখি সুমিতের তৈরি আয়তাকার চিত্র এবং রেবার তৈরি বৃত্তের মধ্যে কোনটি বেশি জায়গা জুড়ে থাকবে।
8. পাইওনিয়ার অ্যাথলেটিক ক্লাবের আয়তাকার মাঠের মাঝখানে একটি বৃত্তাকার জলাশয় আছে যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 মিটার। আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 60 মিটার ও 42 মিটার। জলাশয় বাদে আয়তাকার মাঠের বাকি জায়গায় ঘাস লাগাতে প্রতি বর্গমিটার 75 টাকা হিসাবে কত খরচ হবে হিসাব করে দেখি।

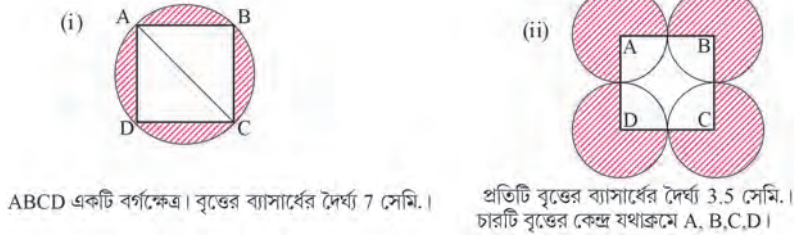
9. ইটালগাছা ফ্রেন্ডস এসোসিয়েশন ক্লাবের বৃত্তাকার পার্কের বাইরের দিকে পরিধি বরাবর একটি 7 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। বৃত্তাকার পার্কের পরিধি 352 মিটার হলে, রাস্তাটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। প্রতি বর্গমিটার 20 টাকা হিসাবে রাস্তাটি বাঁধাতে কত টাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

10. আনোয়ারাবিবি তার অর্ধবৃত্তাকার জমির চারদিকে প্রতি মিটার 18.50 টাকা হিসাবে বেড়া দিতে 2664 টাকা খরচ করেছেন। তিনি যদি তার ওই অর্ধবৃত্তাকার জমি প্রতি বর্গ মিটার 32 টাকা হিসাবে চাষ করান তাহলে মোট কত টাকা খরচ করবেন হিসাব করে লিখি।

11. আজ আমার বন্ধু রজত একই বেগে দৌড়ে স্কুলের বৃত্তাকার মাঠটি যে সময়ে একবার প্রদক্ষিণ করল একই বেগে মাঠের ব্যাস বরাবর দৌড়তে 30 সেকেন্ড কম সময় নিল। তার গতিবেগ 9 মিটার/সেকেন্ড হলে, স্কুলের মাঠের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

12. বকুলতলার বৃত্তাকার মাঠের বাইরের চারদিকে একটি সমপরিসরের রাস্তা আছে। রাস্তাটির বাইরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য ভিতরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 132 মিটার বেশি। পথটির ক্ষেত্রফল 14190 বর্গ মি. হলে, বৃত্তাকার মাঠটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

13. **নীচের ছবির রেখাঙ্কিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।**

ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7 সেমি.।

প্রতিটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি.।
চারটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে A, B,C,D।

14. দীনেশ তাদের শ্রেণির কতজন কোন খেলা খেলতে ভালোবাসে তার একটা পাই-চিত্র তৈরি করেছে। সে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি. নিয়েছে। হিসাব করে প্রতিটি বৃত্তকলার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল লিখি।

15. নীতু একটি বর্গক্ষেত্র ABCD এঁকেছে যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। আমার বোন পাশের ছবির মতো A, B, C ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের চারটি বৃত্তচাপ এঁকেছে এবং কিছু জায়গায় নকশা এঁকেছে। হিসাব করে নকশা আঁকা ক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল লিখি।

16. একটি বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি.। বৃত্তাকার মাঠটির পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। যদি বর্গক্ষেত্রটি বৃত্তাকার মাঠের অন্তর্লিখিত হতো, তাহলে বর্গক্ষেত্রটির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কত হতো তা হিসাব করে লিখি।

17. **নীচের বৃত্তকলাগুলির রেখাঙ্কিত অঞ্চলের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল লিখি।**

18. লীনা মেলা থেকে একটি বালা কিনে হাতে পরেছে। বালাটিতে 269.5 বর্গ সেমি. ধাতু আছে। বালাটির বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 28 সেমি. হলে, অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হিসাব করে লিখি।

19. প্রতুল পাশের ছবির মতো একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। সুমিতা A, B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্তচাপ এঁকেছে এবং মাঝের কিছু জায়গা রঙিন করেছে। হিসাব করে রঙিন জায়গার ক্ষেত্রফল লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]

20. রাবেয়া একটি বড়ো কাগজে 21সেমি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ আঁকল। ওই সমবাহু ত্রিভুজের একটি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে বৃত্তাকার জায়গাটি রঙিন করল। আমি রঙিন জায়গার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

21. একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 462 বর্গ সেমি.। ত্রিভুজটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

22. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 32 সেমি. এবং ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 38.5 বর্গ সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

23. 20 সেমি, 15 সেমি এবং 25 সেমি বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে নির্ণয় করি।

24. জয়া একটি বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করল। ওই বৃত্তটি আবার একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্ত যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সেমি। বর্গক্ষেত্রটির একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

25. সুমিত একটি তারকে দুটি সমান অংশে কাটল। একটি অংশকে বর্গাকারে ও অপর অংশটিকে বৃত্তাকারে বাঁকাল। বৃত্তাকার তারটি বর্গাকার তারটির থেকে 33 বর্গ সেমি বেশি জায়গা নিলে তারটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

26. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) একটি বৃত্তকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল x বর্গ একক, পরিধি y একক ও ব্যাসের দৈর্ঘ্য z একক হলে, $\frac{x}{yz}$ এর মান

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{8}$

(ii) একটি বৃত্তের পরিলিখিত ও অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 4 : 1 (b) 1 : 4 (c) 2 : 1 (d) 1 : 2

(iii) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিধি ও ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। ওই বৃত্তের পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য

(a) 4 একক (b) 2 একক (c) $4\sqrt{2}$ একক (d) $2\sqrt{2}$ একক

(iv) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিলিখিত ও অন্তর্লিখিত বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 4 : 1 (b) 1 : 4 (c) 2 : 1 (d) 1 : 2

(v) একটি বলয়াকৃতি লোহার পাতের অর্ন্তব্যাস 20 সেমি. এবং বর্হিব্যাস 22 সেমি.। বলয়টিতে লোহার পাত আছে

(a) 22 বর্গ সেমি. (b) 44 বর্গ সেমি. (c) 66 বর্গ সেমি. (d) 88 বর্গ সেমি.

27. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 % বৃদ্ধি করলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পায় হিসাব করি।

(ii) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা 50 % হ্রাস করলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত হ্রাস পায় হিসাব করি।

(iii) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার। অন্য একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হলে, তার ক্ষেত্রফল প্রথম বৃত্তের ক্ষেত্রফলের x গুণ হবে তা হিসাব করে দেখি।

(iv) 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত হিসাব করি।

(v) সমবেধবিশিষ্ট একটি টিনের পাত থেকে তিনটি বৃত্তাকার চাকতি কেটে নেওয়া হলো। বৃত্তাকার চাকতি তিনটির ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে, তাদের ওজনের অনুপাত কত হিসাব করে দেখি।

19 স্থানাঙ্ক জ্যামিতি:সরলরেখাংশের অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত

(CO-ORDINATE GEOMETRY:INTERNAL AND EXTERNAL DIVISION OF STRAIGHT LINE SEGMENT)

এবছরের ফেব্রুয়ারি মাসে আমাদের তেতুঁলতলা গ্রামের মিলনী সংঘ ক্লাবের বড়ো আয়তাকার মাঠে যাত্রাপালা আয়োজিত হবে। তাই মাঠটির চারদিক বাঁশ দিয়ে ঘেরা হবে। প্রথমে এই আয়তাকার মাঠের কর্ণ বরাবর চারটি বাঁশ সমান দূরত্বে পোঁতা হবে।

1 ছবি এঁকে হিসাব করে দেখি কোন কোন বিন্দুতে বাঁশ পোঁতা হবে।

আয়তাকার মাঠটির দৈর্ঘ্য 27 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার

মাঠটির দৈর্ঘ্য বরাবর x- অক্ষ ও প্রস্থ বরাবর y- অক্ষ ধরি।

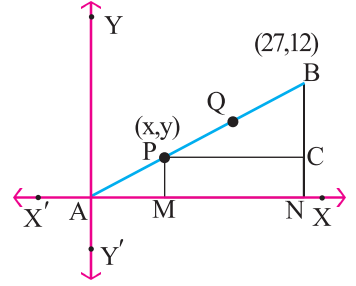
ধরি, আয়তাকার মাঠটির A (0,0) বিন্দুতে প্রথম বাঁশ পোঁতা হলো।

উভয়অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার ধরে B (27,12) বিন্দুতে শেষ বাঁশ পোঁতা হলো।

$\therefore$ A ও B-এর মাঝে সমদূরত্বে দুটি বাঁশ পোঁতা হবে।

ধরি, P ও Q বিন্দু দুটি A ও B বিন্দু দুটির মাঝে এমনভাবে আছে, যাতে AP = PQ = QB হয়।

$\therefore$ P, AB সরলরেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

আবার, Q, AB সরলরেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

2 P ও Q-এর সঠিক অবস্থান বুঝতে P ও Q-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। কিন্তু P ও Q-এর স্থানাঙ্ক কীভাবে পাব?

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ; P এবং B বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও BN লম্ব টানলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করল। আবার P বিন্দু থেকে BN-এর উপর PC লম্ব টানলাম যা BN-কে C বিন্দুতে ছেদ করল।

Δ PAM ও Δ BPC -এর অনুরূপ কোণগুলি সমান।

অর্থাৎ Δ PAM ও Δ BPC সদৃশকোণী।

দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের বাহুগুলির মধ্যে কী সম্পর্ক আছে দেখি ?

মারিয়া তার খাতায় তিন জোড়া সদৃশকোণী ত্রিভুজ এঁকেছে।

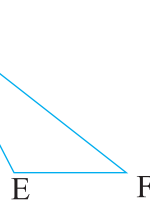
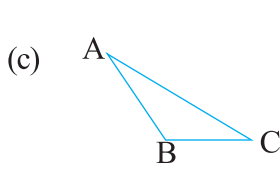
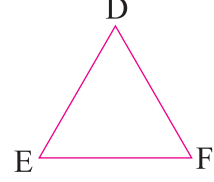
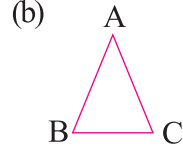
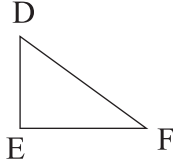
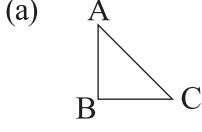
সে এঁকেছে,

(a)

(b)

D
E
F

(c)

D
E
F

চিত্র (a) -এর Δ ABC ও Δ DEF -এর $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$;

আমি চিত্র (a)- এর Δ ABC ও Δ DEF এর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি,

$\frac{AB}{DE} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$ এবং $\frac{AC}{DF} = \frac{\square}{\square}$

অর্থাৎ দেখছি, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

অর্থাৎ দেখছি, Δ ABC ও Δ DEF-এর অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে আছে।

চিত্র (b), (c) ও (d)-এর ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য মেপে দেখছি,

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

আমি অন্য যে-কোনো দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখছি, ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে আছে। [নিজে করি]

পেলাম, দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে থাকবে।

দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তারা সদৃশ হয় অর্থাৎ তাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে থাকে।

যেহেতু, Δ PAM ও Δ BPC সদৃশকোণী

> 'দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়'। এই প্রমাণটি পরে জানব।

$$\therefore \frac{PA}{BP} = \frac{AM}{PC} = \frac{PM}{BC}$$

অর্থাৎ, $\frac{PA}{BP} = \frac{AM}{PC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{x}{27 - x}$

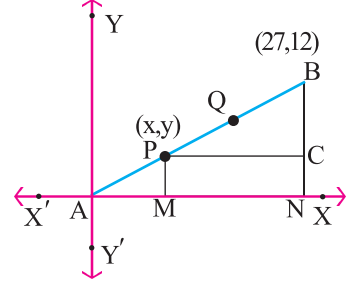
বা, $27 - x = 2x$

$\therefore \quad x = 9$

আবার, $\frac{PA}{BP} = \frac{PM}{BC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{y}{12 - y}$

বা, $12 - y = 2y$

$\therefore \quad y = 4$ $\quad \therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9,4)

$\therefore$ (9,4) বিন্দুটি A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ AB-কে অন্তঃস্থভাবে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

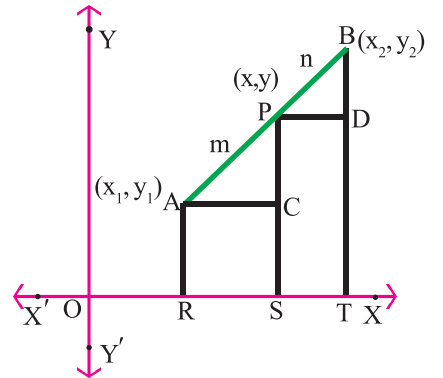
3 আমি একইরকমভাবে Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি যা A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে। [নিজে করি]

4 যদি A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2) যে-কোনো বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে P বিন্দু m : n অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তবে ছবি এঁকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কী হবে হিসাব করি।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

A, B ও P বিন্দু থেকে x- অক্ষের উপরে যথাক্রমে AR, PS ও BT তিনটি লম্ব অঙ্কন করলাম, যা x-অক্ষকে যথাক্রমে R, S এবং T বিন্দুতে ছেদ করল।

A এবং P বিন্দু থেকে PS এবং BT-এর উপর যথাক্রমে AC এবং PD দুটি লম্ব অঙ্কন করলাম যারা PS এবং BT -কে যথাক্রমে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করল।

দেখছি, Δ PAC ও Δ PBD সদৃশকোণী।

$\therefore$ Δ PAC ও Δ PBD সদৃশ। অর্থাৎ, তাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে আছে।

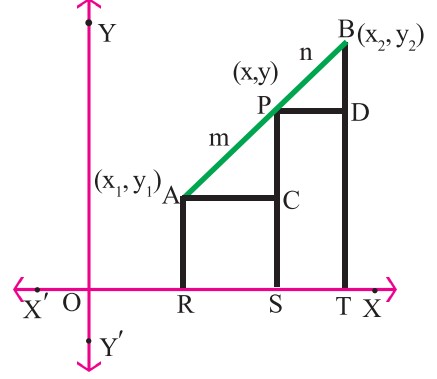
সুতরাং, $\frac{PA}{BP} = \frac{AC}{PD} = \frac{PC}{BD}$ .... (i)

যেহেতু, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)

$\therefore \quad AC = RS = OS - OR = x - x_1$

$PD = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PC = PS - CS = PS - AR = y - y_1$

$BD = BT - DT = BT - PS = y_2 - y$

সুতরাং, (i) থেকে পাই $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$

এখানে, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$

বা, $mx_2 - mx = nx - nx_1$

বা, $mx_2 + nx_1 = mx + nx$

বা, $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

$\therefore x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

আবার, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$

বা, $my_2 - my = ny - ny_1$

বা, $my_2 + ny_1 = my + ny$

বা, $my_2 + ny_1 = y(m + n)$

$\therefore y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$

পেলাম, যে বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$-এর সংযোজক সরলরেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

— একে বিভাজক সূত্র (Section Formula) বলা হয়।

যদি P বিন্দুটি $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু হয়, অর্থাৎ সেক্ষেত্রে 1 : 1 অনুপাতে AB-এর সংযোজক সরলরেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করবে এবং সেক্ষেত্রে P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে,

$$\left(\frac{1.x_2 + 1.x_1}{1+1}, \frac{1.y_2 + 1.y_1}{1+1}\right) \quad [\text{এখানে, } m = 1, n = 1]$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

অর্থাৎ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

5 আমি (6,4) এবং (7,–5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দু 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করবে তার স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

যে বিন্দু (6,4) ও (7,–5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে

তার স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{3\times7+2\times6}{3+2}, \frac{3\times(-5)+2\times4}{3+2}\right)$

$= \left(\frac{33}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

∴ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(\frac{33}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

6 (9,5) এবং (–7,–3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দু 3 : 5 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে তার স্থানাঙ্ক, (☐, ☐) লিখি। [নিজে হিসাব করে লিখি]

7 যদি A (2,5) এবং B (8,15) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে P বিন্দু 3:2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে, তবে ছবি এঁকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

A,B ও P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AR, BS ও PT লম্ব টানলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে R,S ও T বিন্দুতে ছেদ করল।

আবার, A ও B বিন্দু থেকে BS ও PT-এর উপরে যথাক্রমে AD ও BC লম্ব টানলাম যারা BS ও PT-কে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করল। বর্ধিত AD, PT-কে E বিন্দুতে ছেদ করল। যেহেতু, BS ও CT সমান্তরাল এবং AD, BS-এর উপর লম্ব, সুতরাং, AE, PT-এর উপরও লম্ব।

Δ APE ও Δ BPC সদৃশকোণী।

∴ Δ APE ও Δ BPC সদৃশ।

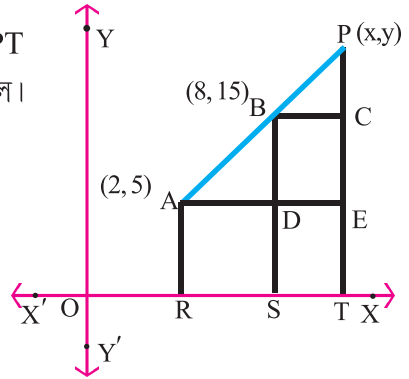
অর্থাৎ, ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতী।

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BC} = \frac{PE}{PC}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{x-2}{x-8} = \frac{y-5}{y-15}$$

এখানে, $\frac{3}{2} = \frac{x-2}{x-8}$ এবং $\frac{3}{2} = \frac{y-5}{y-15}$ ∴ x = ☐ এবং y = ☐

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (20,35)

∴ (20,35) বিন্দুটি A (2,5) ও B (8,15) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

8 আমি ছবি এঁকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি যা A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে m : n অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y)

A, B ও P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AR, BS এবং PT লম্ব অঙ্কন করলাম যা x-অক্ষকে যথাক্রমে R, S ও T বিন্দুতে ছেদ করল।

A ও B বিন্দু থেকে BS ও PT -এর উপর যথাক্রমে AD ও BC লম্ব অঙ্কন করলাম যা BS ও PT -কে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করল। বর্ধিত AD, PT-কে E বিন্দুতে ছেদ করল।

যেহেতু, BS ও PT সমান্তরাল এবং AD, BS-এর উপর লম্ব,

সুতরাং, AE, PT-এর উপরও লম্ব।

Δ AEP ও Δ BCP সদৃশকোণী।

$\therefore$ Δ AEP ও Δ BCP সদৃশ। সুতরাং, ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতী।

সুতরাং, $\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BC} = \frac{PE}{PC}$ .... (i)

এখানে, $AE = RT = OT - OR = x - x_1$

$BC = ST = OT - OS = x - x_2$

আবার, $PE = PT - TE = PT - AR = y - y_1$

$PC = PT - CT = PT - BS = y - y_2$

সুতরাং (i) থেকে পাই, $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$

এখানে, $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$

বা, $mx - mx_2 = nx - nx_1$

বা, $mx - nx = mx_2 - nx_1$

বা, $x(m - n) = mx_2 - nx_1$

$\therefore$ $x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$

আবার, $\frac{m}{n} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$

বা, $my - my_2 = ny - ny_1$

বা, $my - ny = my_2 - ny_1$

বা, $y(m - n) = my_2 - ny_1$

$\therefore$ $y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}$

$\therefore$ যে বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে m : n অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে, তার স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

9 যদি $A = (1,5)$ এবং $B = (-4,7)$ হয়, তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি যা AB সরলরেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

$$\therefore \text{ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, } \left(\frac{3\times(-4)-2\times1}{3-2}, \frac{3\times7-2\times5}{3-2}\right)$$
$$= \left(\frac{-12-2}{1}, \frac{21-10}{1}\right)$$
$$= (-14, 11)$$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-14, 11)$

10 (4, 3) এবং (5,–4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা কি অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে, তা হিসাব করে লিখি।

ধরি, (4,3) ও (5, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা P বিন্দুতে m : n অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে।

$$\therefore \text{ P বিন্দুর কোটি (y-স্থানাঙ্কের মান)} = \frac{m(-4)+n(3)}{m+n}$$

যেহেতু P বিন্দু x-অক্ষের উপর একটি বিন্দু, সুতরাং $y = 0$

$$\therefore \frac{-4m+3n}{m+n} = 0$$

বা, $-4m + 3n = 0$

বা, $3n = 4m$

বা, $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

$\therefore m : n = 3 : 4$

$\therefore$ (4,3) এবং (5,– 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা 3 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

11 প্রমাণ করি যে (–7,2), (19,8), (15,–6) এবং (–11,–12) বিন্দু চারটিকে পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হবে।

ধরি, $A = (-7, 2)$, $B = (19,8)$, $C = (15, -6)$ এবং $D = (-11,-12)$ বিন্দুগুলি কার্তেজীয় তলে বসিয়ে দেখছি ABCD একটি চতুর্ভুজ তৈরি করে।

$$\text{AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{-7+15}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (4, -2)$$

$$\text{BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{19-11}{2}, \frac{8-12}{2}\right) = (4,-2)$$

ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

কষে দেখি— 19

1. **নীচের বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশগুলি যে বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।**
   (i) (6,–14) এবং (–8, 10); 3 : 4 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে।
   (ii) (5, 3) এবং (–7, –2); 2 : 3 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে।
   (iii) (–1, 2) এবং (4, –5); 3 : 2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে।
   (iv) (3, 2) এবং (6, 5); 2 : 1 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে।

2. **নীচের প্রত্যেক বিন্দুগুলোর সংযোজক সরলরেখাংশগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি ঃ**
   (i) (5,4) এবং (3,–4) (ii) (6,0) এবং (0,7)

3. (1, 3) বিন্দুটি (4, 6) ও (3, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে কী অনুপাতে বিভক্ত করেছে হিসাব করে লিখি।

4. (7, 3) ও (–9, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ y-অক্ষ দ্বারা কী অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে হিসাব করে লিখি

5. প্রমাণ করি যে A (7, 3), B (9, 6), C (10, 12) এবং D (8, 9) বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হবে।

6. যদি (3, 2), (6, 3), (x, y) এবং (6, 5) বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হয়, তাহলে (x, y) কত হবে হিসাব করে লিখি।

7. যদি $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ এবং (x_4, y_4) বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ এবং $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

8. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–1, 3), (1,–1) এবং (5, 1); AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

9. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, –4), (6, –2) এবং (–4, 2); ত্রিভুজটির তিনটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

10. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 3), (–2, 7) এবং (0, 11); ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

11. **বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):**
   (i) $(\ell, 2m)$ এবং $(-\ell + 2m, 2\ell - 2m)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক
   (a) (ℓ, m) (b) $(\ell, -m)$ (c) $(m, -\ell)$ (d) (m, ℓ)
   (ii) A(1, 5) এবং B (–4, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে P বিন্দু অন্তঃস্থভাবে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করলে P বিন্দুর ভুজ
   (a) –1 (b) 11 (c) 1 (d) –11

(iii) একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (7, 9) এবং (–1, –3); বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

(a) (3, 3) (b) (4, 6) (c) (3, –3) (d) (4, –6)

(iv) (2, –5) এবং (–3, –2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে একটি বিন্দু 4 : 3 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে। ওই বিন্দুর কোটি

(a) –18 (b) –7 (c) 18 (d) 7

(v) PQRS সামান্তরিকের P(1, 2), Q (4, 6), R (5, 7) এবং S (x, y) শীর্ষবিন্দু হলে,

(a) x = 2, y = 4 (b) x = 3,y = 4 (c) x = 2, y = 3 (d) x = 2, y = 5

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি বৃত্তের কেন্দ্র C এবং ব্যাস AB; A এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6, –7) এবং (5, –2) হলে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

(ii) P ও Q বিন্দু যথাক্রমে প্রথম ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে বিন্দুদুটির প্রত্যেকটির দূরত্ব যথাক্রমে 6 একক এবং 4 একক। PQ সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

(iii) A ও B বিন্দু যথাক্রমে দ্বিতীয় ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে বিন্দুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দূরত্ব যথাক্রমে 8 একক ও 6 একক। AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

(iv) AB সরলরেখাংশের উপর P একটি বিন্দু এবং AP = PB; A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, –4) এবং (–5, 2); P বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

(v) ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল। B এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (7, 3) এবং (2, 6); A ও C বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

20 স্থানাঙ্ক জ্যামিতি:ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

CO-ORDINATE GEOMETRY:AREA OF TRIANGULAR REGION

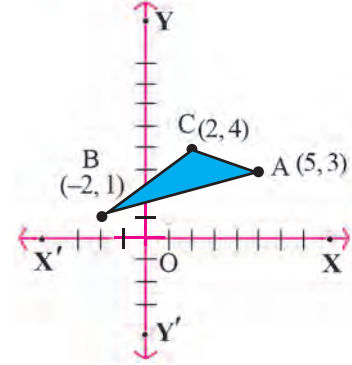
আজ আমরা নবম ও দশম শ্রেণির বন্ধুরা ছক কাগজ ছাড়াই নানান ধরনের বিন্দু নিয়ে কিছু মজার খেলা তৈরির চেষ্টা করব। সেইজন্য দশম শ্রেণির রোফিকা বেগম ও গোরা বড়ো ক্লাসঘরের একটি বোর্ডে অনেকগুলি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখেছে।

1 প্রথমে আমি ও বিবেক পাশের বোর্ডে কিছু বিন্দু আঁকব ও তাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করব। বিবেক লিখল, A (5, 3) ও B (– 2, 1) । আমি বোর্ডে A ও B বিন্দু আঁকি ও AB সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

AB সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\{5-(-2)\}^2+(3-1)^2}$ একক

$=\sqrt{49+4}$ একক $=\sqrt{53}$ একক

বুলু আর একটি বিন্দু C (2, 4) আঁকল।

আমি A, B ও C বিন্দু তিনটি যোগ করে একটি ত্রিভুজ পেলাম।

2 কিন্তু Δ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কীভাবে বের করব?

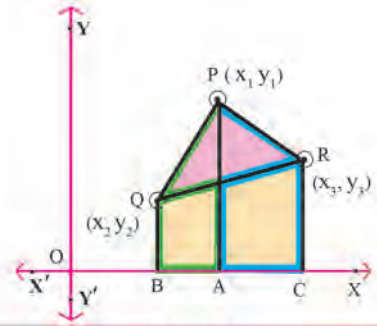
AB,BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে হেরনের সূত্রের সাহায্যে ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি। এছাড়া ভূমি ও উচ্চতা জানা থাকলে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা -এর সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি।

3 তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সহজে কীভাবে ওই তিনটি বিন্দুকে একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু ধরে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারব ছবি এঁকে খুঁজি।

ধরি, P (x_1 y_1), Q (x_2 y_2) এবং R (x_3 , y_3) যে-কোনো তিনটি বিন্দু। P, Q ও R থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA, QB ও RC তিনটি লম্ব অঙ্কন করলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে A,B ও C বিন্দুতে ছেদ করল।

আমি ছবি থেকে দেখছি,

Δ PQR ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= QBAP ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + PACR ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – QBCR ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $\times$ তাদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{1}{2}(QB + PA) \times BA + \frac{1}{2}(PA + RC)AC - \frac{1}{2}(QB + RC) \times BC$$
$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$
$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2+y_1) - x_2(y_2+y_1) + x_3(y_1+y_3) - x_1(y_1+y_3) - x_3(y_2+y_3) + x_2(y_2+y_3)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2+y_1-y_1-y_3) + x_2(y_2+y_3-y_2-y_1) + x_3(y_1+y_3-y_2-y_3)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$$

পেলাম, Δ PQR ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$............(i)

4 আমি (i) নং সূত্রের সাহায্যে A (5, 3), B (– 2, 1) ও C (2, 4) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

Δ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\{5(1-4) + (-2)(4-3) + 2(3-1)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(-15 - 2 + 4)$ বর্গ একক

$= -\frac{13}{2}$ বর্গএকক $= -6\frac{1}{2}$ বর্গ একক

এখানে,
$(x_1, y_1) = (5, 3)$,
$(x_2, y_2) = (-2, 1)$
এবং $(x_3, y_3) = (2, 4)$

যেহেতু, ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করার সময় বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা ঘোরার দিকে (Clock wise) নেওয়া হয়েছে তাই ΔABC -এর ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয়েছে।

যদি ঘড়ির কাঁটা ঘোরার বিপরীত দিকে নিতাম তাহলে ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কী পেতাম দেখি।

ΔABC-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\{5(4-1) + 2(1-3) + (-2)(3-4)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{5 \times 3 + 2 \times (-2) + (-2)(-1)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(15 - 4 + 2)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 13$ বর্গ একক $= 6\frac{1}{2}$ বর্গ একক

এক্ষেত্রে,
$(x_1, y_1) = (5, 3)$,
$(x_2, y_2) = (2, 4)$
এবং $(x_3, y_3) = (-2, 1)$

দেখছি, বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিলে ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হচ্ছে।

তাই, (i) নং সূত্রে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ লেখা হয়। '| |' চিহ্নকে মডিউলাস (modulus) বা সংক্ষেপে মড্ (mod) বলা হয়।

$|x|$ এর অর্থ, $|x| = x$ যখন $x \geq 0$
$= -x$ যখন $x < 0$

যেমন $|5| = 5$
এবং $|-5| = -(-5) = 5$

যেহেতু, ক্ষেত্রফলের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 6\frac{1}{2}$ বর্গ একক

5 P (3,5) , Q (– 4 , 4) এবং R (5,2) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

Δ PQR ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}[3(4-2)+(-4)(2-5)+5\ (5-4)]$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\ [3 \times 2 + 12 + 5]$ বর্গ একক $= 11\frac{1}{2}$ বর্গ একক

6 প্রমাণ করি যে, (1, 4) , (2, 3) ও (0, 5) বিন্দুগুলি সমরেখ।

যদি A (1, 4), B (2, 3) ও C(0, 5) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য হয় তবে (1, 4), (2, 3) ও (0, 5) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে।

$\therefore$ Δ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\ [1(3-5)+2(5-4)+0(4-3)]$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}[-2+2+0]$ বর্গ একক $= 0$ বর্গ একক

$\therefore$ (1, 4), (2, 3) ও (0, 5) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

> **সুতরাং, $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2)$ এবং (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যখন $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$ হবে।**

7 প্রমাণ করি যে, (3a, 0), (0, 3b), এবং (a, 2b) বিন্দুগুলি সমরেখ। [নিজে করি]

8 (0, – 4), (–1, y) এবং (3, 2) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত (সমরেখ) হলে, y-এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, – 4), B বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (– 1, y) এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (3, 2)

যেহেতু A, B ও C সমরেখ,

$\therefore\ 0 \times (y-2) + (-1)(2+4) + 3(-4-y) = 0$

বা, $-6-12-3y=0$

বা, $-3y = 18$

$\therefore\ y = -6$

$\therefore$ y = – 6 হলে, A , B ও C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় থাকবে।

9 একটি চতুভুর্জের পরপর কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2), (3, 4), (5, – 1) ও (4, – 3); চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (1, 2), B বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (3, 4), C বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (5, – 1) এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (4, – 3)

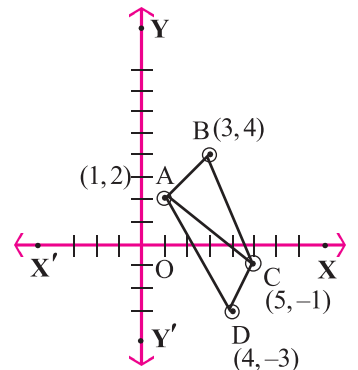
AC কর্ণ টানলাম।

$\therefore$ Δ ABC ও Δ ACD দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র পেলাম।

$\therefore$ ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\ |1(4+1)+3(-1-2)+5(2-4)|$ বর্গ একক

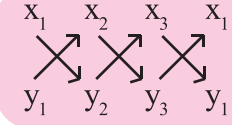
$= \frac{1}{2}\ |5-9-10|$ বর্গ একক

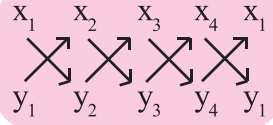
$= |-7|$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক

আবার, Δ ACD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\square$ বর্গ একক [নিজে করি]

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(7 + 5\frac{1}{2})$ বর্গ একক = $12\frac{1}{2}$ বর্গ একক

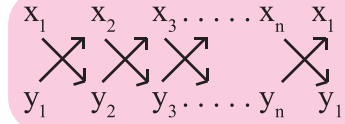
ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} | x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) |$

$= \frac{1}{2} | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) |$

একইভাবে, চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1) |$

চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পর্যন্ত নবম শ্রেণির পাঠ্যসূচির অন্তর্ভুক্ত

n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \ldots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + \ldots + y_nx_1) |$

10 ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 2, 5), (– 4, –3) এবং (6, – 2); ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কীভাবে পাব দেখি।

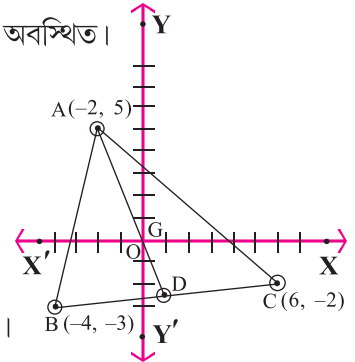
ধরি, BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G, AD মধ্যমার উপর অবস্থিত।

আবার, AG : GD = 2 : 1

ধরি, G বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3-2}{2}\right)$

$= \left(1, \frac{-5}{2}\right)$

G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

সুতরাং, $x = \frac{2 \times 1 + 1 \times (-2)}{2 + 1}$ বা, $x = \frac{2-2}{3}$ $\therefore$ $x = 0$

আবার, $y = \frac{2 \times (-\frac{5}{2}) + 1 \times 5}{2 + 1}$ বা, $y = \frac{-5+5}{3}$ $\therefore$ $y = 0$

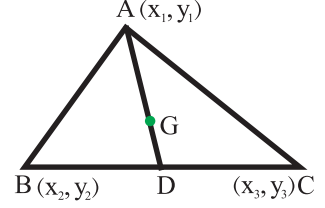
সুতরাং, Δ ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক (0, 0)

11 ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কী হবে দেখি।

ধরি, BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; ভরকেন্দ্র G, AD মধ্যমার উপর অবস্থিত এবং AG : GD = 2 : 1

ধরি, ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করছে।

সুতরাং, $x = \frac{2 \times \frac{(x_2+x_3)}{2} + 1 \times x_1}{2+1}$ $\qquad \therefore x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$

আবার, $y = \frac{2 \times \frac{(y_2+y_3)}{2} + 1 \times y_1}{2+1}$ $\qquad \therefore y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

$\therefore$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ .... (ii)

(ii) নং সূত্রের সাহায্যে (7, – 5), (– 2, 5) এবং (4, 6) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। [নিজে করি]

কষে দেখি— 20

1. নীচের শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রতিক্ষেত্রে নির্ণয় করি:

(i) (2, – 2) , (4, 2) এবং (– 1, 3)

(ii) (8, 9) (2, 6) এবং (9, 2)

(iii) (1, 2), (3, 0) এবং মূলবিন্দু

2. প্রমাণ করি যে, (3, – 2), (– 5, 4) এবং (– 1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

3. K-এর মান কত হলে, (1, – 1) ,(2, – 1) এবং (K, – 1) বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় থাকবে হিসাব করে লিখি।

4. প্রমাণ করি যে, (1, 2) এবং (–2, – 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুগামী।

5. প্রমাণ করি যে, (2, 1) এবং (6, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু (– 4, – 5) ও (9, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত।

6. নীচের প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দু চারিটির সংযোগে গঠিত চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি :

(i) (1, 1), (3, 4), (5, –2), (4, –7) (ii) (1, 4), (– 2, 1), (2, – 3), (3, 3)

7. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) (– 4, 3) এবং (8, – 6); ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি এবং A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

8. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 5) এবং ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (–2, 1) হলে, BC বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

9. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, – 3), (– 5, 2) এবং (x, y); যদি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র মূলবিন্দু হয়, তাহলে x ও y-এর মান নির্ণয় করি।

10. A (–1, 5), B (3, 1) এবং C (5, 7) ত্রিভুজ ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু। D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। DEF ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি এবং দেখাই যে $\Delta ABC = 4\Delta DEF$

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) (0,4), (0, 0) এবং (–6, 0) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
(a) 24 বর্গ একক (b) 12 বর্গ একক (c) 6 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক

(ii) (7, – 5), (– 2, 5) এবং (4, 6) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক
(a) (3, – 2) (b) (2, 3) (c) (3, 2) (d) (2, – 3)

(iii) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC = 90°$; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 4) এবং (3, 0) হলে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
(a) 12 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক (c) 24 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক।

(iv) (0, 0), (4, – 3) এবং (x, y) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে
(a) x = 8, y = –6 (b) x = 8, y = 6 (c) x = 4, y = – 6 (d) x = –8, y = – 6

(v) ABC ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, –4) এবং ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1, 2) হলে, BC বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক
(a) (–2, –5) (b) (– 2, 5) (c) (2, – 5) (d) (5, –2)

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(i) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 1) (1, 1) এবং (1, 0); ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

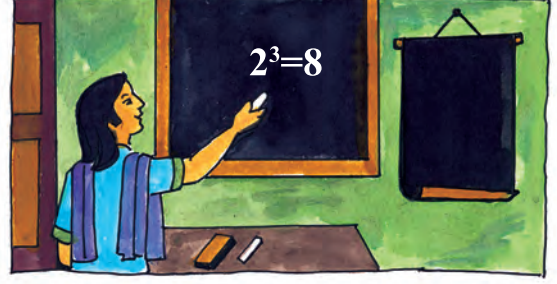
(ii) একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, 9) এবং দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (15, 0) এবং (0, 10); তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

(iii) (a, 0), (0, b) এবং (1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাই যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

(iv) (1, 4), (–1, 2) এবং (– 4, 1) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

(v) (x – y, y – z), (– x, –y) এবং (y, z) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক লিখি।

21 লগারিদম্ (LOGARITHM)

আমার বন্ধু তথাগত একটি কালো রঙের চার্ট পেপারে অনেকগুলি সংখ্যা লিখে শ্রেণিকক্ষের দেওয়ালে টাঙিয়ে দিয়েছে। আমরা এই চার্টে লেখা সংখ্যাগুলি নিয়ে এক মজার খেলা খেলব। আমার বন্ধু বুলু ব্ল্যাকবোর্ডে একটি সংখ্যা 2 লিখল। আমরা তথাগতর তৈরি চার্ট পেপারে যে-কোনো একটি সংখ্যা বোর্ডে লিখব এবং সেই সংখ্যাটি 2-এর কোন ঘাতে আছে নির্ণয় করার চেষ্টা করব।

নাজরিন 2-এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 8 সংখ্যাটি বোর্ডে লিখল

আমি 2-এর কোন ঘাতে 8 পাবো দেখি।

$2^3=8$

এবার নাজরিন 2 -এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 64 সংখ্যাটি বোর্ডে লিখল।

2-কে কোন ঘাতে উন্নীত করলে 64 পাবো হিসাব করি

ধরি, $2^x = 64 = 2^6$

$\therefore x = 6$

বুঝেছি, 2-এর ষষ্ঠঘাত 64

এবার নাজরিন 2-এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 7 সংখ্যাটি লিখেছে।

আমি 2-কে কোন ঘাতে উন্নীত করলে 7 পাব দেখি।

ধরি, $2^x=7$————(i)

চারটি প্রাথমিক প্রক্রিয়া যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ এবং উদ্‌ঘাতন (Involution) [ঘাত বৃদ্ধি যেমন, 5^2, $3^{4/3}$ ইত্যাদি], অবঘাতন (Evolution) [মূল নির্ণয় যেমন, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি] এই 6 টি মৌলিক প্রক্রিয়া দ্বারা x-এর মান বের করতে পারব না।

কিন্তু (i) নং সমীকরণের সমাধান কীভাবে পাব ?

লগারিদমের ধারণা ব্যবহার করে আমরা (i) নং সমীকরণের সমাধান করতে পারি। লগারিদ্‌মের ধারণাকে কখন কখনও বলা হয় **সপ্তম মৌলিক প্রক্রিয়া**।

আমরা দেখছি, $2^2 = 4$ এবং $2^3 = 8$

সুতরাং বুঝতে পারছি, $2^x = 7$ হলে, x এমন একটি বাস্তব সংখ্যা হবে যে $2 < x < 3$ হবে এবং সেই বাস্তব সংখ্যাটিকে আমরা $\log_2 7$ বলি।

$\therefore 2^x = 7$ সমীকরণটি সমাধান করে পাই $x = \log_2 7$

সংজ্ঞা: যদি a ও M দুটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a > 0$, $a \neq 1$ এবং $M > 0$ হয়, তবে একটি বাস্তব সংখ্যা x-কে নিধান a-এর সাপেক্ষে M-এর লগারিদ্‌ম বলা হয় যদি $a^x = M$ হয় এবং লিখি $x = \log_a M$; $M \neq 1$ এর জন্য $\log_a M = \log_b M$ হবে, যদি এবং একমাত্র যদি $a = b$ হয়, অর্থাৎ $M \neq 1$ এর জন্য $\log_a M$ একটি অনন্য (Unique) বাস্তব সংখ্যা।

যেমন, $\log_2 1 = \log_3 1 = 0$; কেননা $2^0 = 1$ এবং $3^0 = 1$; কিন্তু $\log_2 5 \neq \log_3 5$

আবার, $\log_2 8 = 3$; কারণ $2^3 = 8$;

$\log_2 64 = 6$; কারণ $2^6 = 64$

1 নাজরিন এবার 2-এর পাশে ব্ল্যাকবোর্ডে 0.25 লিখল। আমি লগারিদ্‌মের ধারণা ব্যবহার করে 2-এর কোন ঘাত 0.25 হবে লিখি।

$2^x = 0.25$

বা, $2^x = \dfrac{25}{100}$ বা, $2^x = \dfrac{1}{4}$ বা, $2^x = \dfrac{1}{2^2}$

$\therefore$ $2^x = 2^{-2}$

সুতরাং, $\log_2 0.25 = -2$ [যেহেতু, $2^{-2} = 0.25$]

2 আমি $\log_{\sqrt{3}} 81$-এর মান হিসাব করে লিখি

ধরি, $x = \log_{\sqrt{3}} 81$

$\therefore$ সংজ্ঞা থেকে পাই, $(\sqrt{3})^x = 81 = 3^4$

বা, $3^{\frac{x}{2}} = 3^4$ বা, $\dfrac{x}{2} = 4$

$\therefore x = 8$

3 আমি $\log_{\sqrt{7}} 343$-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

যদি $M > 0$ এবং $a > 0$ ও $a \neq 1$ না হয় তাহলে কি লগারিদ্‌মের সংজ্ঞা পাব না?

(i) নাজরিন $M < 0$ এবং a সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$ -এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

যদি $\log_2 (-5) = x$ হয়, তবে $2^x = -5$ হতে হবে।

কিন্তু সর্বদাই $2^x > 0$; সুতরাং, $M < 0$ অবস্থায় $\log_a M$ অসংজ্ঞাত।

(ii) নাজরিনের বন্ধু সহেলী $M = 0$ এবং a সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

যদি, $\log_2 0 = x$ হয়, তবে $2^x = 0$ হবে।

কিন্তু সর্বদাই $2^x > 0$; সুতরাং, $M=0$ অবস্থায় $\log_a M$ অসংজ্ঞাত।

(iii) সহেলীর বন্ধু রজত $a < 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

(a) যদি $\log_{-2}16 = x$ হয়, তবে $(-2)^x = 16$; সুতরাং, $x = 4$

আবার, যদি $\log_2 16 = y$ হয়, তবে $2^y = 16$; অর্থাৎ, $y = 4$

$\therefore \log_{-2}16 = \log_2 16$; কিন্তু $\log_a M = \log_b M$ হলে, $a = b$ হয় যখন $M \neq 1$; কিন্তু $-2 \neq 2$

সুতরাং, $a < 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান অনন্য (Unique) নয়। তাই $a < 0$ অবস্থায় $\log_a M$ অনন্যতার অভাবে অসংজ্ঞাত।

(b) আবার রজত $a = 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

$\log_0 16 = x \quad \therefore 0^x = 16$; কিন্তু $0^x = 0\ (x > 0)$

সুতরাং, $\log_a M$ অসংজ্ঞাত যখন $a = 0$

(c) এবার রজত $a = 1$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল

$\log_1 16 = x \quad \therefore 1^x = 16$; কিন্তু বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য 1^x এর বাস্তব মান 1

সুতরাং, $\log_a M$ অসংজ্ঞাত যখন $a = 1$

(iv) রজতের বন্ধু সিরাজ $a < 0$ এবং $M < 0$ নিয়ে লগারিদমের মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

4 $\log_{-2}(-16)$-এর মান পাওয়া যায় কিনা দেখি (নিজে করি)

নিজে করি — 20.1

(1) $\log_2(-7)$ (2) $\log_5 0$ (3) $\log_{-3}2$ (4) $\log_0 2$ (5) $\log_1 7$ -এগুলির মান পাওয়া যায় কিনা দেখি

জোসেফ ব্ল্যাকবোর্ডে দুটি সংখ্যা 8 ও 32 লিখল।

5 আমি 2 নিধানের সাপেক্ষে 8 ও 32-এর লগারিদ্‌ম লিখি।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

$\log_2 32 = 5 \quad [\because 2^5 = 32]$

6 2 নিধানের সাপেক্ষে 8×32 এবং $\frac{32}{8}$ -এর লগারিদ্‌ম লিখি।

$\log_2(8\times32) = \log_2 256 = 8 = 3+5 = \log_2 8 + \log_2 32 \qquad [\because 2^8 = 256]$

আবার, $\log_2\left(\frac{32}{8}\right) = \log_2 4 = 2 = 5 - 3 = \log_2 32 - \log_2 8$

7 M ও N যে কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা $M > 0$ এবং $N > 0$ এবং a যে কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা $a > 0, a \neq 1$ হলে, $\log_a M$, $\log_a N$-এর সাহায্যে $\log_a(MN)$ ও $\log_a\frac{M}{N}$ -কে প্রকাশ করে কী পাই দেখি।

ধরি, $\log_a M = p, \log_a N = q$

$\therefore a^p = M$ এবং $a^q = N$

$\therefore MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$

$\therefore \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

$\therefore$ পেলাম $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ .... (I)

এবং $\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\therefore \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$

পেলাম, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ———————— II

8 আমি 2-এর নিধানের সাপেক্ষে 8^5 -এর লগারিদ্ম নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

আবার, $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

$\therefore \log_2 8^5 = 15 = 5\times3 = 5 \times \log_2 8$

9 M, a, c যে কোনো তিনটি বাস্তব সংখ্যা $M > 0, a > 0, a \neq 1, \log_a M^c$– এর সরল মান কি পাই দেখি।

ধরি, $\log_a M = p \quad \therefore a^p = M$

$\therefore \quad M^c = (a^p)^c = a^{pc}$

$M^c > 0$, যেহেতু $M > 0$

$\therefore \log_a M^c = pc = c.p = c \log_a M$

$\therefore$ **পেলাম, $\log_a M^c = c \log_a M$ —————— III**

10 কিন্তু আমি যদি লগারিদ্মের নিধান পরিবর্তন করতে চাই অর্থাৎ $\log_a M$ -কে $\log_b M$ (যেখানে b যেকোনো একটি বাস্তব সংখ্যা ও $b \neq 1, b > 0$) -এর সাহায্যে প্রকাশ করতে চাই, তবে কীভাবে প্রকাশ করব দেখি।

ধরি, M, a,b তিনটি বাস্তব সংখ্যা যেখানে, $M > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

ধরি, $\log_b M = r \quad \therefore b^r = M$

এবং $\log_a b = d \quad \therefore a^d = b$

$\therefore M = b^r = (a^d)^r = a^{rd}$

$\therefore \log_a M = rd = \log_b M \times \log_a b$

$\therefore$ **পেলাম, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ —————— IV**

I থেকে IV পর্যন্ত 4 টি লগারিদ্মের সূত্র পেলাম এবং IV নং সূত্রটিকে নিধান পরিবর্তনের সূত্র বলা হয়। $\log_y x$-এই ধরনের কোন সংখ্যার ক্ষেত্রে সবসময় ধরে নেব x ও y দুটি বাস্তব সংখ্যা, $x > 0, y > 0, y \neq 1$

4 টি লগারিদ্মের সূত্র ছাড়াও লগারিদ্মের সংজ্ঞা ও সূত্র থেকে কী কী লিখতে পারি দেখি।

(i) $\log_a 1 = 0 \quad [\because a^0=1]$

(ii) $\log_a a = 1 \quad [\because a^1 = a]$

(iii) $a^{\log_a M} = M \quad$ [ধরি, $\log_a M = u \therefore a^u = M \therefore a^{\log_a M} = M$]

(iv) $\log_a b \times \log_b a = \log_a a = 1 \quad$ [সূত্র IV থেকে পাই]

(v) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

(vi) $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b} \quad [\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b]$

(vii) $\log_a (M_1M_2M_3......M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \log_a M_3 + ... + \log_a M_n$ [যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

(viii) $\log_a \dfrac{1}{a} = -1 \quad$ [যেহেতু $\log_a \dfrac{1}{a} = \log_a 1 - \log_a a = 0 - 1 = -1$]

(ix) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N} = \dfrac{\log_b M}{\log_b N} \quad$ [সূত্র IV থেকে পাই]

(x) যদি $\log_a M = \log_a N$ হয়, তবে $M = N$

[$\log_a M = \log_a N$ হলে, $a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \therefore M = N$, (iii) নং থেকে পেলাম]

11 আমি $\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$ -এর মান নির্ণয় করি।

$$\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$$
$$= \log_3 \{\log_2 (\log_{\sqrt{3}}3^4)\}$$
$$= \log_3 [\log_2 (\log_{\sqrt{3}} \{(\sqrt{3})^2\}^4)]$$
$$= \log_3\{\log_2 (\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8)\}$$
$$= \log_3 \{\log_2 8 (\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3})\} \qquad [\because \log_a M^c = c \log_a M]$$
$$= \log_3 \{\log_2 8\} \qquad [\because \log_a a = 1]$$
$$= \log_3 \{\log_2 2^3\} = \log_3 \{3\log_2 2\} = \log_3 3 = 1$$

12 আমি $\log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5 = 1$ — প্রমাণ করি।

বামপক্ষ $= \log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2(5\times2) - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2 5 + \log_2 2 - \log_5 5^3 \times \frac{1}{\log_5 8}$ $\quad [\because \log_a MN = \log_a M + \log_a N$ এবং $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}]$

$= \log_2 5 + 1 - 3\log_5 5 \times \frac{1}{\log_5 2^3}$ $\quad [\because \log_a a = 1$ এবং $\log_a M^c = c \log_a M]$

$= \log_2 5 + 1 - 3 \times \frac{1}{3\log_5 2} = \log_2 5 + 1 - \log_2 5 = 1 =$ ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

13 আমি $(7\log\frac{10}{9} - 2 \log\frac{25}{24} + 3 \log\frac{81}{80})$-এর সরলতম মান হিসাব করে লিখি।

[নিধানের উল্লেখ না থাকলে এই অধ্যায়ের সব অঙ্কে $\log M$ বললে বুঝব $\log_{10}M$]

$$7 \log\frac{10}{9} - 2 \log\frac{25}{24} + 3 \log\frac{81}{80}$$
$$= 7(\log 10 - \log 9) - 2 (\log 25 - \log 24) + 3 (\log 81 - \log 80)$$
$$= 7 \{\log (2 \times 5) - \log 3^2\} - 2 \{(\log 5^2 - \log (2^3 \times 3)\} + 3 \{\log 3^4 - \log (5 \times 2^4)\}$$
$$= 7 \{\log 2 + \log 5 - 2 \log 3\} - 2\{2 \log 5 - 3 \log 2 - \log 3\} + 3 \{4 \log 3 - \log 5 - 4 \log 2\}$$
$$= 7 \log 2 + 7 \log 5 - 14 \log 3 - 4 \log 5 + 6 \log 2 + 2 \log 3 + 12 \log 3 - 3 \log 5 - 12 \log 2$$
$$= \log 2$$

14 আমি $7 \log\frac{16}{15} + 5 \log\frac{25}{24} + 3 \log\frac{81}{80} = \log 2$ — প্রমাণ করি। [নিজে করি]

15 $\frac{1}{2}$ -এর লগারিদ্‌ম $-\frac{1}{2}$ হলে নিধান নির্ণয় করি।

ধরি, নিধান $= x$

$\therefore \log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

বা, $(x^{-\frac{1}{2}})^2 = (\frac{1}{2})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]

বা, $x^{-1} = \frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{4} \therefore x = 4$ নির্ণীত নিধান= 4

16 0.04 -এর লগারিদম – 2 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

17 যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\log\frac{1}{3}\ (a+b) = \frac{1}{2}\ (\log a + \log b)$

দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$

বা, $(a+b)^2 = 9ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = (ab)$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$ [উভয়পক্ষে log নিলাম]

বা, $2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

$\therefore\ \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [প্রমাণিত]

18 যদি $a^2 - 11ab + b^2 = 0$ হয়, তাহলে দেখাই যে $\log\frac{1}{3}(a-b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [নিজে করি]

ফিরোজ ব্ল্যাকবোর্ডে অনেকগুলো লগারিদ্‌গম লিখল যাদের নিধান 10

ফিরোজ লিখল, (i) $\log_{10}10$ (ii) $\log_{10}100$ (iii) $\log_{10}1000$ (iv) $\log_{10}125$

19 আমি ফিরোজের লেখা লগারিদ্‌মের মান নির্ণয় করি।

(i) $\log_{10}10 = 1$ (ii) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10 = 2$

(iii) $\log_{10}1000 = \square$ [নিজে লিখি]

(iv) $\log_{10}125$

$= \log_{10}5^3$

$= 3\log_{10}5$

$= 3\log_{10}\frac{10}{2}$

$= 3(\log_{10}10 - \log_{10}2)$

$= 3(1 - \log_{10}2)$

কিন্তু যে সকল লগারিদ্‌মের নিধান 10 তাদের কী বলব?

নিধান 10 সাপেক্ষে কোনো বাস্তব সংখ্যা $M(>0)$ -এর লগারিদ্‌মকে ওই সংখ্যাটির সাধারণ লগারিদ্‌ম (Common Logarithm) বলা হয়।

সাধারণ লগারিদ্‌ম-এর ধারণাটি প্রথম চালু করেছিলেন হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs)। তার নাম অনুসারে কখনো কখনো এই বিশেষ লগারিদ্‌মকে ব্রিগারীয় পদ্ধতি (Briggarian system of Logarithm) -ও বলা হয়।

সাধারণ লগারিদ্‌ম ছাড়া অন্য কোন লগারিদ্‌ম আমরা প্রচুর ব্যবহার করি?

সাধারণ লগারিদ্‌ম ছাড়া আমরা **স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম** (Natural Logarithm) ব্যবহার করি।

কোনো বাস্তব সংখ্যা M(>0) -এর যে লগারিদ্‌মের নিধান e [যেখানে e হচ্ছে 2.71828-এর কাছাকাছি অর্থাৎ 2 ও 3 -এর অন্তবর্তী একটি তুরীয় অমূলদ সংখ্যা(Transcendental Irrational Number)] সেই লগারিদ্‌ম M-কে **স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম** বলা হয়।

স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম-এর ধারণাটি প্রথম পাওয়া যায় ইংরেজ গণিতজ্ঞ জন নেপিয়র-এর লেখা বইতে। স্বাভাবিক লগারিদ্‌মকে অনেক সময় লগারিদ্‌ম-এর নেপিয়রীয় পদ্ধতি বলা হয়।

20 $\log_{10}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2) = \log_{10}4$ হলে, a ও b -এর মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

$\log_{10}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2) = \log_{10}4$

বা, $\log_{10}(\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}) = \log_{10}2^2$

বা, $\frac{(a+b)^2}{ab} = 4$

বা, $(a+b)^2 = 4ab$

বা, $(a+b)^2 - 4ab = 0$

বা, $(a-b)^2 = 0$

বা, $a-b = 0$ $\therefore$ $a = b$ এটি, a ও b -এর মধ্যে সম্পর্ক।

21 হিসাব করে দেখাই যে, $\log_{10}3$-এর মান $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ -এর মধ্যে আছে।

ধরি, $\log_{10}3 = x$

$\therefore$ $10^x = 3$

$\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$-এর হরগুলির ল.সা.গু. ☐

$10^x = 3$

$\therefore$ $(10^x)^6 = 3^6 = 729$

$\therefore$ $10^{6x} = 729$

যেহেতু, $100 < 729 < 1000$

বা, $10^2 < 10^{6x} < 10^3$

বা, $2 < 6x < 3$

বা, $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

সুতরাং, $\frac{1}{3} < \log_{10}3 < \frac{1}{2}$

22 যদি $x = \log_{2a} a,\ y = \log_{3a} 2a$ এবং $z = \log_{4a} 3a$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $xyz + 1 = 2yz$

$x = \log_{2a} a,\ y = \log_{3a} 2a$ এবং $z = \log_{4a} 3a$

বামপক্ষ $= xyz+1 = \log_{2a} a \times \log_{3a} 2a \times \log_{4a} 3a + 1$

$= \log_{3a} a \times \log_{4a} 3a + 1$

$= \log_{4a} a + 1 = \log_{4a} a + \log_{4a} 4a$

$= \log_{4a} 4a^2$

$= \log_{4a} (2a)^2$

$= 2\log_{4a} 2a$

$= 2\log_{3a} 2a \times \log_{4a} 3a$

$= 2yz =$ ডানপক্ষ $\qquad \therefore$ পেলাম, $xyz + 1 = 2yz$ (প্রমাণিত)

23 $x = \log_a bc,\ y = \log_b ca$ এবং $z = \log_c ab$ হলে, দেখাই যে, $x + y + z = xyz - 2$ [নিজে করি]

24 $\dfrac{\log x}{y - z} = \dfrac{\log y}{z - x} = \dfrac{\log z}{x - y}$ হলে, দেখাই যে, $x^x . y^y . z^z = 1$

ধরি, $\dfrac{\log x}{y - z} = \dfrac{\log y}{z - x} = \dfrac{\log z}{x - y} = k$ [যেখানে $k \neq 0$]

$\therefore \log x = k(y - z)$, আবার, $\log y = k(z - x)$ এবং $\log z = k(x - y)$

বা, $x \log x = xk(y - z)$, বা, $y \log y = yk(z - x)$ বা, $z \log z = zk(x - y)$

বা, $\log x^x = k(xy - zx)$...(i) বা, $\log y^y = k(yz - xy)$...(ii) বা, $\log z^z = k(zx - yz)$ ...(iii)

(i) + (ii) + (iii) করে পাই, $\log x^x + \log y^y + \log z^z = k[xy - zx + yz - xy + zx - yz] = 0$

বা, $\log x^x y^y z^z = \log 1$ [$\because \log 1 = 0$]

$\therefore x^x . y^y . z^z = 1$ (প্রমাণিত)

25 যদি $\dfrac{\log x}{b - c} = \dfrac{\log y}{c - a} = \dfrac{\log z}{a - b}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x^a . y^b . z^c = 1$

ধরি, $\dfrac{\log x}{b - c} = \dfrac{\log y}{c - a} = \dfrac{\log z}{a - b} = k\ (k \neq 0)$

$\therefore \log x = k(b - c),\ \log y = k(c - a),\ \log z = k(a - b)$

এখন, $\log(x^a . y^b . z^c) = \log x^a + \log y^b + \log z^c$

$= a \log x + b \log y + c \log z$

$= ak(b - c) + bk(c - a) + ck(a - b)$

$= k(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

$= k \times 0 = 0 = \log 1$ $\qquad$ সুতরাং, $x^a . y^b . z^c = 1$ (প্রমাণিত)

26 যদি $a^{2-x}.\ b^{5x} = a^{x+3}.\ b^{3x}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x \log \frac{b}{a} = \log\sqrt{a}$

$a^{2-x}.\ b^{5x} = a^{x+3}.\ b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{x+3}}{a^{2-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{x+3-2+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2x+1}$

বা, $b^{2x} = a^{2x}.a$

বা, $(\frac{b}{a})^{2x} = a$

সুতরাং, $\log (\frac{b}{a})^{2x} = \log a$ [উভয়পক্ষে log নিলাম]

বা, $2x \log (\frac{b}{a}) = \log a$

বা, $x \log (\frac{b}{a}) = \frac{1}{2} \log a$

বা, $x \log (\frac{b}{a}) = \log a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ x \log (\frac{b}{a}) = \log\sqrt{a}$ (প্রমাণিত)

27 সমাধান করি (i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$ (ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

(i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\log_{10}x - \log_{10}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\log_{10}x - \frac{1}{2} \log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\frac{1}{2} \log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $(\log_{10}x)^2 = 4$

বা, $\log_{10}x = \pm 2$

$\log_{10}x = 2$ হলে, $x = 10^2$ $\therefore\ x = 100$

আবার, $\log_{10}x = -2$ হলে, $x = 10^{-2}$ $\therefore\ x = \frac{1}{100}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{100}$ বা 100

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

বা, $\log_2\log_2 x = 2^1$ বা, $\log_2\log_2 x = 2$ বা, $\log_2 x = 2^2$ বা, $\log_2 x = 4$

বা, $x = 2^4$ $\therefore\ x = 16$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 16$

কষে দেখি— 21

1. মান নির্ণয় করি :

(i) $\log_4 \left(\frac{1}{64}\right)$ (ii) $\log_{0.01} 0.000001$ (iii) $\log_{\sqrt{6}} 216$ (iv) $\log_{2\sqrt{3}} 1728$

2. (a) 625 -এর লগারিদ্‌ম 4 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি।

(b) 5832- এর লগারিদ্‌ম 6 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি।

3. (a) $1 + \log_{10} a = 2 \log_{10} b$ হলে, a কে b -এর দ্বারা প্রকাশ করি ।

(b) $3 + \log_{10} x = 2 \log_{10} y$ হলে, x কে y-এর দ্বারা প্রকাশ করি।

4. মান নির্ণয় করি :

(a) $\log_2 [\log_2 \{\log_3 (\log_3 27^3)\}]$

(b) $\dfrac{\log\sqrt{27} + \log 8 - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

(c) $\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 3$

(d) $\log_{10} \frac{384}{5} + \log_{10} \frac{81}{32} + 3\log_{10} \frac{5}{3} + \log_{10} \frac{1}{9}$

5. প্রমাণ করি :

(i) $\log \frac{75}{16} - 2\log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$

(ii) $\log_{10} 15 (1+\log_{15} 30) + \frac{1}{2}\log_{10} 16 (1+\log_4 7) - \log_{10} 6 (\log_6 3+1+\log_6 7)=2$

(iii) $\log_2 \log_2 \log_4 256+2\log_{\sqrt{2}} 2=5$

(iv) $\log_{x^2} x \times \log_{y^2} y \times \log_{z^2} z = \frac{1}{8}$

(v) $\log_{b^3} a \times \log_{c^3} b \times \log_{a^3} c = \frac{1}{27}$

(vi) $\dfrac{1}{\log_{xy}(xyz)} + \dfrac{1}{\log_{yz}(xyz)} + \dfrac{1}{\log_{zx}(xyz)} = 2$

(vii) $\log \frac{a^2}{bc} + \log \frac{b^2}{ca} + \log \frac{c^2}{ab} = 0$

(viii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$

6. (i) যদি $\log \frac{x+y}{5} = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 23$

(ii) যদি $a^4 + b^4 = 14a^2b^2$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\log (a^2 + b^2) = \log a + \log b + 2\log 2$

7. যদি $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $xyz = 1$

8. যদি $\frac{\log x}{b-c} = \frac{\log y}{c-a} = \frac{\log z}{a-b}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে,

(a) $x^{b+c} . y^{c+a} . z^{a+b} = 1$ (b) $x^{b^2+bc+c^2} . y^{c^2+ca+a^2} . z^{a^2+ab+b^2} = 1$

9. যদি, $a^{3-x} .b^{5x} = a^{5+x} .b^{3x}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x \log (\frac{b}{a}) = \log a$

10. সমাধান করি :

(a) $\log_8 [\log_2 \{\log_3 (4^x + 17)\}] = \frac{1}{3}$ (b) $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$

11. দেখাই $\log_{10} 2$ -এর মান $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{3}$ -এর মধ্যে অবস্থিত।

12. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) যদি $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ হয়, তাহলে x -এর মান

(a) 0.5 (b) 0.25 (c) 4 (d) 16

(ii) $\log_{10}(7x-5) = 2$ হলে, x -এর মান

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18

(iii) $\log_2 3 = a$ হলে, $\log_8 27$ হবে

(a) 3a (b) $\frac{1}{a}$ (c) 2a (d) a

(iv) $\log_{\sqrt{2}} x = a$ হলে, $\log_{2\sqrt{2}} x$ হবে

(a) $\frac{a}{3}$ (b) a (c) 2a (d) 3a

(v) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ হলে, x- এর মান হবে

(a) 27 (b) 9 (c) 3 (d) $\frac{1}{27}$

13. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

(i) $\log_4 \log_4 \log_4 256$ -এর মান কত হবে হিসাব করি।

(ii) $\log \frac{a^n}{b^n} + \log \frac{b^n}{c^n} + \log \frac{c^n}{a^n}$ -এর মান কত হবে হিসাব করি।

(iii) দেখাই যে $a^{\log_a x} = x$

(iv) $\log_e 2 . \log_x 25 = \log_{10} 16 . \log_e 10$ হলে, x -এর মান নির্ণয় করি।

22 সেট তত্ত্ব
(SET THEORY)

জেনে বা না জেনে সকলেরই সেটের একটা ধারণা আছে। প্রায়ই বলে থাকি বা শুনি একদল ছাত্র বা একদল ছাত্রী, এক ঝাঁক মৌমাছি, একভাঁড় মিষ্টি, গ্রন্থাগারের বই সমূহ, অখণ্ড সংখ্যা সমূহ, মূলবিন্দুগামী সরলরেখা গোষ্ঠী ইত্যাদি। প্রথম পাঁচটি উদাহরণ দল গঠন করেছে, ওই দলগুলি সেট গঠন করে না। কিন্তু শেষের দুটি দল সেট গঠন করে।

এই উক্তিগুলির মধ্যে একটি দলকে একটি নতুন উপাদান হিসাবে ভাববার মৌলিক ধারণা নিহিত আছে। আমরা প্রতিটি ক্ষেত্রে সসীম (finite) (যেমন নবম শ্রেণির ছাত্রীরা) বা অসীম (যেমন অখণ্ড সংখ্যাসমূহ) সংখ্যক মূর্ত (concrete) (যেমন নবম শ্রেণির ছাত্রীরা) বা বিমূর্ত (abstact) (যেমন অখণ্ড সংখ্যাসমূহ) উপাদানের সংকলন (collection) বিবেচনা করি।

সেট তত্ত্ব গণিতশাস্ত্রের একটি মূলভিত্তি। গণিতশাস্ত্রের যে-কোনো বিষয় আলোচনা করতে গেলে যেমন কলনবিদ্যা (calculus), বীজগণিত, তাত্ত্বিক কম্পিউটার বিদ্যা ইত্যাদি সেট তত্ত্বের ধারণা ছাড়া পূর্ণাঙ্গ আলোচনা সম্ভব নয়। ইংরেজ গণিতজ্ঞ জর্জ বুল [George Boole (1815-1864)] এই ব্যাপারে প্রথম আলোকপাত করেন। পরবর্তীকালে জার্মান গণিতজ্ঞ জর্জ এল. পি. ক্যান্টর [George L. P. Cantor (1845-1918)] বিষয়টির প্রভূত উন্নতি সাধন করেন। তাঁকেই সেট তত্ত্বের জনক বলা হয়।

সেটের ধারণা :

পৃথক (distinct) বস্তুসমূহের **সুসংজ্ঞাত** (Well-defined) সমাহার বোঝাতে সেট শব্দটি ব্যবহৃত হয়। সুতরাং কোনো বস্তুসমূহের সমাহার (Collection) বা সমষ্টিকে (Aggregate) সেট বলা হবে যদি

(i) সমাহারটি সুসংজ্ঞাত (Well-defined) হয়

(ii) সমাহারের অন্তর্গত যেকোনো দুটি বস্তু পরস্পর ভিন্ন (distinct) হয়

সুসংজ্ঞাত বলতে কী বুঝি :

নবম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রী যাদের বয়স 14 বছর থেকে 14 বছর 3 মাস তাদের সেট তৈরি সম্ভব। কারণ এটি সুসংজ্ঞাত।

কিন্তু নবম শ্রেণির বুদ্ধিমান ছাত্র-ছাত্রীদের সেট তৈরি সম্ভব নয়। কারণ বুদ্ধিমান শব্দটি সুসংজ্ঞাত নয়। সপ্তাহের সাতদিন একটি সেট গঠন করে, কিন্তু সপ্তাহের তিনদিন সেট গঠন করে না।

চিহ্নের ব্যবহার :

সাধারণত ইংরাজি বর্ণমালার বড়ো হাতের অক্ষর A, B, C, ... X, Y, Z ইত্যাদি দিয়ে সেট এবং a, b, c, ... x, y, z ইত্যাদি ছোটো হাতের অক্ষর দিয়ে সেটের অন্তর্গত উপাদানগুলি (elements) চিহ্নিত করা হয়।

a যদি কোনো সেট A-এর একটি উপাদান হয় তবে বক্তব্যটি $a \in A$ (a belongs to A রূপে পড়ি) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করি। আবার a যদি কোনো সেট A-এর কোনো উপাদান না হয়, তবে বক্তব্যটি $a \notin A$ (a does not belong to A রূপে পড়ি) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করি।

'$\in$' চিহ্নটি গ্রিক বর্ণমালার একটি বর্ণ এর নাম এপসাইলন। ইতালীয় গণিতবিদ Peano (1854-1932) প্রথম এই চিহ্ন ব্যবহার করেন।

সেটের প্রকাশ পদ্ধতি :

কোনো সেটকে দুভাবে প্রকাশ করা হয়।

(i) তালিকা পদ্ধতি (Roster or Tabular method) (ii) সেট নির্মাণ পদ্ধতি (Set builder method)

ইংরাজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহের সেট :

তালিকা পদ্ধতি : ইংরাজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহের সেট V দ্বারা সূচিত করলে, V = {a, e, i, o, u}; অর্থাৎ, এই পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়।

সেট নির্মাণ পদ্ধতি : V = {x | P(x)}, যেখানে P(x) হলো ইংরাজী বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহ। অর্থাৎ এই পদ্ধতিতে যদি কোনো সেট A-এর প্রত্যেকটি উপাদান x, একটি সাধারণ ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য P(x) মেনে চলে তবে A = {x | P(x)} বা, A = {x : P(x)} আকারে A সেটটি প্রকাশ করা হয়।

পরস্পর ভিন্ন বলতে কী বুঝি: A = {2,2} ও A = {2} একই। এখানে 2 ও2 অভিন্ন, তাই 2-কে একবারই নেওয়া যাবে।

স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সেট :

তালিকা পদ্ধতি : স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহের সেট N দ্বারা সূচিত করলে N = {1, 2, 3, ...}

সেট নির্মাণ পদ্ধতি : A = {x | x একটি স্বাভাবিক সংখ্যা}

ইংরাজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহের সেট V হলে, V = {a, e, i, o, u}; এতে যেকোনো উপাদানকে আগে বা পরে লেখা যায়। যেমন V = {a, i, e, o, u}

সসীম সেট (Finite Set):

যে সেটের উপাদানসমূহের সংখ্যা সসীম তাকে সসীম সেট বলে। যেমন, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, V = { a,e,i,o,u} ইত্যাদি।

সেটের উপাদান সমূহের সংখ্যা :

একটি সসীম সেট A-এর উপাদান সংখ্যা (Number of elements of the Set A) যদি n হয়, তবে n-কে A সেটের মাত্রা (Order of the Set A) বলে এবং এটি | A | বা n (A) [Order of Set A রূপে পড়ি] দ্বারা সূচিত করা হয়। n কে বলা হয় A ক্ষেত্রের অঙ্কবাচক সংখ্যা (Cardinal number of A)।

n (A) = 6 এবং n (V) = 5

যদি, X = {1, 1, 1, 1} একটি সেট হয়, তবে, X = {1}; সুতরাং, n (x) = 1

অসীম সেট (Infinite Set):

যে সেটের উপাদান সমূহের সংখ্যা অসীম তাকে অসীম সেট বলে।

যেমন, (i) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N = {1, 2, 3, 4, ...} একটি অসীম সেট।

(ii) পূর্ণসংখ্যার সেট Z = {........... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ....} একটি অসীম সেট।

একপদী সেট (Singleton Set):

যে সেটের উপাদান সংখ্যা এক তাকে একপদী সেট বলে। যেমন, A = {2}, একটি একপদী সেট।

শূন্য সেট (Null or Empty or Void Set):

একটি সেটের মধ্যে কোনো উপাদান না থাকলে ওই সেটটিকে শূন্য সেট বলে।

শূন্য সেটকে গ্রিক অক্ষর Φ বা { } চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন, $\Phi = \{x : x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $2 < x < 3\}$

(i) শূন্য সেটের উপাদান সংখ্যা শূন্য।

(ii) শূন্য সেটটি সসীম সেট।

(iii) Φ সেটটি এবং $\{0\}$ সেটটি এক নয়।

(iv) Φ সেটটি এবং $\{\Phi\}$ সেটটি ভিন্ন। Φ দ্বারা শূন্য সেটটি সূচিত হয়। কিন্তু $\{\Phi\}$ সেটটি একটি একক সেট যার একটি এবং কেবলমাত্র একটি উপাদান হলো Φ অর্থাৎ শূন্য সেট।

(v) শূন্য সেটটি অনন্য (unique)। সেইজন্য কখনও একটি শূন্য সেট লেখা হয় না। সর্বদা শূন্য সেটটি লেখা হয়।

সেট সমূহের সেট (Set of Sets):

একটি সেটের প্রত্যেকটি উপাদান সেট হলে ওই সেটকে সেটসমূহের সেট বলে।

যেমন $\{\{1, 2\}, \{1\}\}$

এখানে একটি সেট অন্য একটি সেটের উপাদান হিসাবে নেওয়া হয়েছে। একটি দলকে একটি নতুন উপাদান হিসাবে ভাবা সেট তত্ত্বের অতি প্রয়োজনীয় ধারণা।যেমন ভারত একটি দেশ, এশিয়া একটি মহাদেশ ইত্যাদি।

সেটের সমতা (Equality of Sets) :

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$ সুতরাং $A = B$

$C = \{x \mid x$, 'steep' শব্দটির একটি বর্ণ$\} = \{s, t, e, p\}$

$D = \{x \mid x$, 'step' শব্দটির একটি বর্ণ$\} = \{s, t, e, p\}$

$\therefore \quad C = D$

যদি দুটি সেট A ও B-তে একই উপাদান থাকে, তবে সেট দুটিকে সমান বলা হবে।

অতএব, $A = B$ হবে যদি $x \in A \rightarrow x \in B$ এবং $y \in B \rightarrow y \in A$ হয়।

অনেকসময় '$\rightarrow$' চিহ্নের বদলে '$\Rightarrow$' ব্যবহার করা হয়। '$\Rightarrow$' বা '$\rightarrow$' চিহ্ন দ্বারা যৌক্তিক অনুসৃতি (Logical Implication) বোঝানো হয়। ('$\Rightarrow$' চিহ্ন Implies that or means that রূপে পড়ি।)

- $n(A) = n(B)$ হলে, সর্বদা $A = B$ হবে না। যেমন $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$

সুতরাং, $n(A) = n(B)$, কিন্তু $A \neq B$; কেননা $3 \in A \not\Rightarrow 3 \in B$ ('$\not\Rightarrow$' এই চিহ্ন does not imply that রূপে পড়ি)

- কিন্তু $A = B$ হলে, সর্বদা $n(A) = n(B)$ হবে।

উপসেট ও অধিসেট (subset and super set) :

যদি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$ দুটি সেট হয়, তবে A সেটটিকে B সেটের উপসেট বলা হবে এবং B সেটটিকে A সেটের অধিসেট বলা হবে।

যদি কোনো সেট A-এর প্রত্যেকটি উপাদান (element) অপর একটি সেট B-এর উপাদান হয়, তবে A সেটকে B সেটের উপসেট এবং B সেটকে A সেটের অধিসেট বলা হয়। চিহ্নের সাহায্যে লেখা হয়, $A \subseteq B$; যদি $A = B$ না হয়, কিন্তু A, B -এর উপসেট হয়, তখন লেখা হয় $A \subset B$

$A \subseteq B$ বলতে বুঝি, $x \in A \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$ বলতে বুঝি, $y \in B \Rightarrow y \in A$

যদি, $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়, তখন $A = B$ হবে।

$\{1, 2, 3\}$ সেটের উপসেটগুলি হলো Φ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Φ (শূন্য সেটটি) যেকোনো সেটের উপসেট।

যে-কোনো সসীম সেটের উপসেটের সংখ্যা 2^n; যেখানে n সসীম সেটটির উপাদানের সংখ্যা। এক্ষেত্রে A সেটের উপসেটগুলির সংখ্যা $2^3 = 8$; কেননা $n(A)=3$

A, B-এর প্রকৃত উপসেট হবে যদি এবং কেবল যদি A, B-এর উপসেট হয় কিন্তু $A \neq B$ হয়।

$\{1, 2, 3\}$ এর প্রকৃত উপসেটগুলি হলো Φ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$

সুতরাং যে-কোনো সসীম সেটের n সংখ্যক উপাদান বিশিষ্ট প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $2^n - 1$; যেমন এক্ষেত্রে প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $(2^3 - 1) = 7$

সমতুল্য সেট (Equivalent Set) :

দুটি সসীম সেট A ও B -কে সমতুল্য বলা হবে যদি উভয় সেটের উপাদান সংখ্যা একই হয়।

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{a, b, c, d\}$; $n(A) = n(B) = 4$; সুতরাং A ও B দুটি সমতুল্য সেট।

দুটি সসীম সেট সমান হলে তারা সমতুল্য হবে। কিন্তু দুটি সমতুল্য সেট সমান নাও হতে পারে।

সার্বিক সেট (universal Set) :

সেট সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যায় কোন কোন ক্ষেত্রে এমন একটি সেটের প্রয়োজন হয় যে, ওই সমস্যায় আলোচিত সব সেটগুলি এই সেটটির উপসেট হয়। এই নতুন সেটটিকে ওই সমস্যায় আলোচ্য সেটগুলির সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে। সার্বিক সেটকে সাধারণত U অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়। যেমন,

ধরি, এক অঙ্কের সংখ্যার তিনটি সেট A, B, C

এবং $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$

সুতরাং, এক্ষেত্রে সার্বিক সেট ধরতে পারি $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

সার্বিক সেটটি অনন্য (unique) নয়।

দুটি সেটের অন্তর (Difference of two Sets) :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ হলে, $A - B = \{1, 3, 5\}$

A এবং B সেটদুটির অন্তর বলতে এমন সেট বোঝায় যার উপাদানগুলি A-তে আছে কিন্তু B-তে নেই এবং একে $A - B$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$A - B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \notin B\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ হলে,

$B - A = \{6, 8, 10\}$

$A - \Phi = A$ এবং $\Phi - A = \Phi$

$A - B \neq B - A$ যখন $A \neq B$

উপসেট গোষ্ঠী (Power Set) :

A একটি সেট; A সেটের সব উপসেটের সেটকে বলা হয় A-এর উপসেট গোষ্ঠী এবং এই উপসেট গোষ্ঠীকে P (A) দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন, $A = \{a, b, c\}$ হলে, উপসেট গোষ্ঠী হবে

$P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$

কোন সসীম সেট A-র উপাদান সংখ্যা n হলে, A সেটের উপসেট গোষ্ঠী P (A)-এর উপাদান সংখ্যা হবে 2^n

পূরক সেট (Complement of a Set) :

কোনো সার্বিক সেট U-এর সাপেক্ষে একটি সেট A -এর পূরক সেটকে A^c দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং, পূরক সেট বলতে বুঝি $A^c = U - A = \{x \mid x \in U$ এবং $x \notin A\}$। যেমন, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{0, 1\}$ হলে, তবে A -এর পুরক সেট হবে $A^c = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; আবার যদি $U = \{x \mid x$ বাস্তব সংখ্যা$\}$, $A = \{x \mid x$ মূলদ সংখ্যা$\}$ হয়, তবে $A^c = U - A = \{x \mid x$ অমূলদ সংখ্যা$\}$ হবে।

দুটি সেটের সংযোগ (Union of two Sets) :

A ও B দুটি প্রদত্ত সেট। A ও B সেটের সংযোগকে $A \cup B$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এটি বলতে বুঝি, $A \cup B = \{x \mid x \in A$ অথবা $x \in B\}$ যেমন,

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $A \cup \Phi = A$

দুটি সেটের ছেদ (Intersection of two Sets) :

দুটি সেট A এবং B-এর ছেদকে $A \cap B$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এটি বলতে বুঝি, $A \cap B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \in B\}$

যেমন, (i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ হলে, $A \cap B = \{2, 3\}$ হবে।

(ii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ হলে, $A \cap B = \Phi$

(iii) $A \cap \Phi = \Phi$

শূন্যছেদী সেটসমূহ (Disjoint Sets) :

দুটি প্রদত্ত সেট A ও B-এর মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান না থাকলে ওই সেট দুটিকে শূন্যছেদী সেটসমূহ বলে। অর্থাৎ $A \cap B = \Phi$ (যেখানে Φ হলো শূন্য সেট) হলে, A ও B সেট দুটিকে শূন্যছেদী সেটসমূহ বলা হয়।

যেমন, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ হলে,

$A \cap B = \Phi$; সুতরাং, A ও B সেট দুটি শূন্যছেদী সেটসমূহ।

দুটি সেটের প্রতিসম অন্তর (Symmetric difference of two sets) :

দুটি সেট A ও B-এর প্রতিসম অন্তর $A \Delta B$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

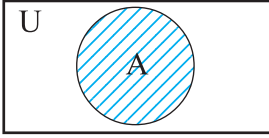
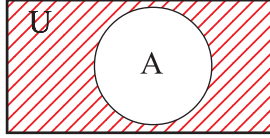
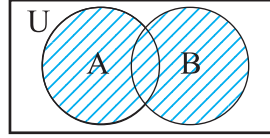
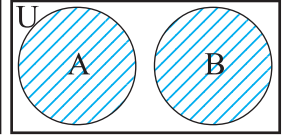
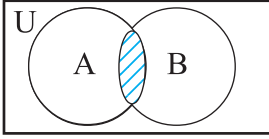
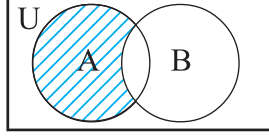
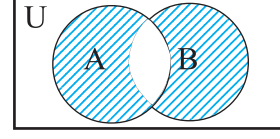
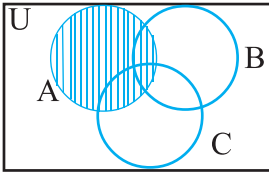
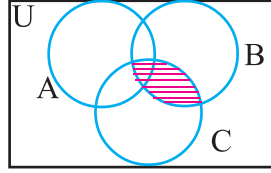
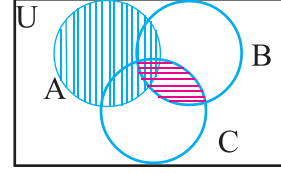
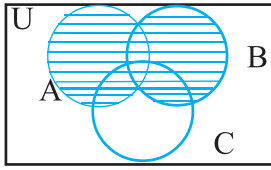
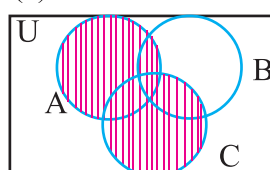
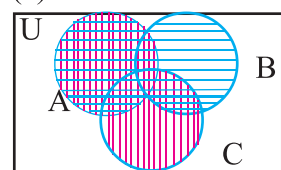
যেমন, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, e, f\}$,

$A - B = \{a, c\}$, $B - A = \{e, f\}$,

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, e, f\}$

ভেন চিত্রসমূহ (Venn diagrams) :

যে চিত্রসমূহের মাধ্যমে সেট প্রক্রিয়া সমূহ উপস্থাপিত করা যায় তাকে ভেন চিত্র বলে। জন ভেন (John Venn) সেটের প্রক্রিয়াসমূহের ধারণা দিতে প্রথম এই ধরনের চিত্র ব্যবহার করেন।

ভেন চিত্রে সার্বিক সেটকে সাধারণত একটি আয়তক্ষেত্র দিয়ে দেখানো হয় এবং সার্বিক সেটের উপসেটসমূহ আয়তক্ষেত্রের ভিতর একটি বক্ররেখা দ্বারা বদ্ধক্ষেত্র বা বৃত্তকার ক্ষেত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়। প্রতিটি চিত্রেই রেখাঙ্কিত করা বা ভরাট করা অংশটির মাধ্যমে ওই চিত্রের নীচে লেখা সেটটিকে বোঝানো হয়।

ভেনচিত্রের সাহায্যে পেলাম, $A\cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

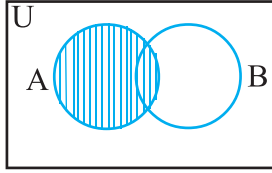
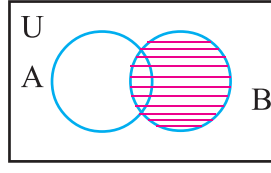
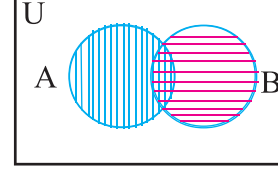
4 **ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাই যে,**

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(c) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ [নিজে করি]

5 **ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাই যে,**

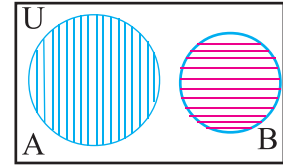
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

A

B

$A \cup B$

ধরি, A সেটের উপাদান সংখ্যা x অর্থাৎ $n(A) = x$, B সেটের উপাদান সংখ্যা y অর্থাৎ $n(B) = y$ এবং $A \cap B$ সেটের উপাদান সংখ্যা z অর্থাৎ $n(A \cap B) = z$

সুতরাং, $n(A \cup B) = x + y - z$

$\therefore \; n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

যদি $A \cap B$ সেটের পদসংখ্যা শূন্য হয়,

অর্থাৎ $n(A \cap B) = 0$ হলে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

6 **একটি অঞ্চলে সমীক্ষা করে দেখা গেছে যে 70 জন ইংরাজি সংবাদপত্র, 73 জন বাংলা সংবাদপত্র এবং 64 জন উভয় প্রকার সংবাদপত্র পড়েন। যদি 63 জন কোনো প্রকার সংবাদপত্র না পড়েন তবে মোট কতজনের মধ্যে সমীক্ষাটি চালানো হয়েছিল হিসাব করে দেখি।**

মনে করি, ইংরাজি সংবাদপত্র পড়েন এরকম লোকসংখ্যার সেট = E এবং বাংলা সংবাদপত্র পড়েন এরকম লোকসংখ্যার সেট = B

এখন, প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $n(E) = 70$, $n(B) = 73$ এবং $n(E \cap B) = 64$

সুতরাং, $n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$ [A ও B দুটি সেট হলে, আমরা জানি, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$]

$= 70 + 73 - 64 = 79$

$\therefore$ 79 জন দুই রকম সংবাদপত্রের মধ্যে একরকম এবং দুইরকমই সংবাদপত্র পড়েন।

আবার, কোনো প্রকার সংবাদপত্র পড়েন না এমন লোকসংখ্যা = $n(E \cup B)^C = 63$

$\therefore$ নির্ণীত মোট লোকসংখ্যা $(79 + 63)$ জন = 142 জন।

$\therefore$ ওই সমীক্ষাটি চালানো হয়েছিল 142 জন লোকের মধ্যে।

23 সম্ভাবনা তত্ত্ব (PROBABILITY THEORY)

আমরা প্রায়ই বলি আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা আছে। আজ খেলায় ভারতের জেতার সম্ভাবনা আছে ইত্যাদি।

সম্ভাবনা কথাটা তখনই ব্যবহার হয়, যখন কোনো প্রকার অনিশ্চয়তা ঘটনার সঙ্গে জড়িয়ে থাকে। আমরা এই সম্ভাবনার ধারণা সুনির্দিষ্ট ভাবে বোঝার চেষ্টা করব।

সম্ভাবনা (Probability) শব্দটি ঘটনার (Event) সঙ্গে জড়িত এবং ঘটনা শব্দটি পরীক্ষার (Experiment) সঙ্গে জড়িত।

সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment) :

আমরা সম্ভাবনা তত্ত্বে যে ধরনের পরীক্ষার বিষয় আলোচনা করবো সেই ধরনের পরীক্ষাকে **সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment)** বলা হয়।

আমরা এরকম একটি সমসম্ভব পরীক্ষার উদাহরণ দিই —

আমি একটা ছক্কা ফেলছি। এটি একটি সমসম্ভব পরীক্ষা কেননা—

(i) কী কী ফল হতে পারে তা আমাদের জানা ।

(ii) কিন্তু এখন কি হবে তা অজানা ।

(iii) পরীক্ষাটি যতবার ইচ্ছা করা সম্ভব।

আমরা জানি একটি ছক্কা ফেললে 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6 এর কেউ না কেউ পড়বে। কিন্তু এখন কী পড়বে তা অজানা।

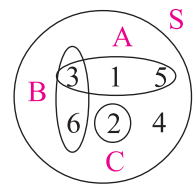
নমুনা দেশ বা ঘটনা দেশ (Sample Space or Event Space) :

কোনো একটি সমসম্ভব পরীক্ষা করলে যা যা ফল **(Outcome)** হতে পারে তাদের সেটকে **নমুনা দেশ বা ঘটনা দেশ (Sample Space or Event Space)** বলা হয় এবং ফলগুলিকে নমুনাবিন্দু **(Sample Points or event points)** বলা হয়।

এই সমসম্ভব পরীক্ষার জন্য যা যা **ঘটনা** ঘটবে তারা আসলে এই নমুনাদেশ বা ঘটনা দেশের উপসেট। যেমন আমরা যদি একটি ছক্কা ফেলি তাহলে নমুনা দেশটি হবে

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এখানে 1, 2, 3, 4, 5 ও 6 এরা এক একটি ফল (Outcome) এবং $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{2\}$ প্রভৃতি S এর উপসেটগুলি এই সমসম্ভব পরীক্ষার এক একটি ঘটনা(Event)। এই ঘটনাগুলির সম্ভাবনা আমরা বার করব।

যদি ছক্কাটি সুষম বা নিখুঁত বা সুনির্মিত (Fair) বা পক্ষপাতহীন (Unbiased) হয় এবং আমরা ওই ছক্কাটির ক্ষেত্রে $A = \{1, 3, 5\}$ এই ঘটনা (Event) ঘটার সম্ভাবনাকে P(A) চিহ্ন দ্বারা লিখি এবং পড়ি 'A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা'। এখানে আমরা পাবো, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

আবার যদি $B = \{3, 6\}$ বা $C = \{2\}$ ইত্যাদি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বার করি তাহলে পাবো,

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ এবং $P(C) = \frac{1}{6}$

এখানে দেখছি, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ এবং $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ নেওয়া হয়েছে। যেখানে n(A), n(B), n(C) এবং n(S) যথাক্রমে A, B, C ও S সেটের বিন্দুর সংখ্যা বোঝাচ্ছে।

সম্ভাবনার পুরাতন সংজ্ঞা (Classical definition of Probability) বা প্রাথমিক সংজ্ঞা (A Priori definition of Probability) বা গাণিতিক সংজ্ঞা (Mathematical definition of Probability)

E একটি সমসম্ভব পরীক্ষা (Random experiment) এবং এই পরীক্ষার ফলে নমুনাদেশ বা ঘটনাদেশটি (Sample space or Event space) হল S, এখানে S সেটের ফলের (Outcome) সংখ্যা সসীম এবং ফলগুলি সমভাবে সম্ভাব্য (equally likely or mutually symmetrical)। যদি A একটি ঘটনা (Event) হয়, অর্থাৎ A, S এর একটি উপসেট হয় এবং A সেটে বিন্দুর সংখ্যা n(A) ও S সেটে বিন্দুর সংখ্যা n(S) হয়, তবে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P(A) দ্বারা চিহ্নিত করা হবে এবং $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ হবে।

1 কোনো নিখুঁত বা পক্ষপাতহীন মুদ্রা পরপর দুবার ফেলা হলে দুবারই হেড পড়ার সম্ভাবনা কত?

হেড ও টেল পড়াকে যথাক্রমে H ও T দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

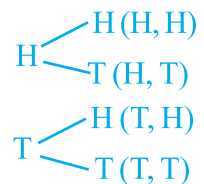
এক্ষেত্রে নমুনাদেশটি হল S = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T) }

এবং আমরা যে ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে চাইছি সেটি হল A = {(H, H)}

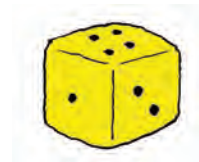
H — H (H, H)
H — T (H, T)
T — H (T, H)
T — T (T, T)

এখানে দেখছি n (A) = 1 এবং n (S) = 4

∴ প্রাথমিক সংজ্ঞা অনুযায়ী পাই,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

2 একটি নিখুঁত বা পক্ষপাতহীন ছক্কা দুবার চালা হলো এবং উভয়ক্ষেত্রে ছক্কার উপরদিকে যে সংখ্যাটি উঠল তার পার্থক্য লক্ষ করা হলো। এই পার্থক্য 3 হবার সম্ভাবনা কত?

এক্ষেত্রে নমুনাদেশটি হলো,

S = {(1,1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2),................................(2,6),
(3,1), (3,2),................................(3,6),
....
(6,1), (6,2),...............................(6,6)}

এবং আমরা যে ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে চাইছি সেটা হলো,

A = {(1,4), (2,5), (3,6),(4,1), (5,2), (6,3)}

এখানে দেখছি n(A) = 6 এবং n(S) = 36

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3 একটি নিখুঁত বা পক্ষপাতহীন মুদ্রা 3 বার ফেলা হলে, ঠিক দুটি হেড (H) ও একটি টেল (T) পড়ার সম্ভাবনা কত?

এক্ষেত্রে নমুনাদেশটি হলো,

S = {(T, T, T), (T, H, H), ☐, ☐, ☐, ☐, ☐, (H, H, H)}

এবং আমরা যে ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে চাইছি সেটা হলো,

A = {(H, H, T), (H, T, H), ☐} $\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{☐}{☐}$

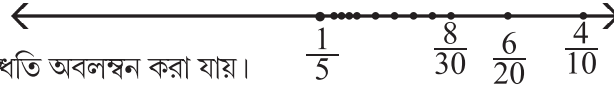
আগের আলোচনায় আমরা কোনো সমসম্ভব পরীক্ষায় একটি একবিন্দুযুক্ত ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা কী হবে তা ধরে নিচ্ছিলাম। আমরা যখন বলছি একটি সুষম (Fair) ছক্কা ফেলছি তখন ওই সুষম কথার মাধ্যমে আমরা ধরে নিচ্ছি {1}, {2}, {3}, {4}, {5} ও {6} এই একবিন্দুযুক্ত ঘটনাগুলির প্রত্যেকটির ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ অর্থাৎ $P(\{1\}) = \frac{1}{6}, P(\{2\}) = \frac{1}{6}, ..., P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ এবং এর সাহায্যেই আমরা ওই পরীক্ষায় অন্য ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বের করছিলাম।

অর্থাৎ $P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

এখন আমরা নিখুঁত বা পক্ষপাতযুক্ত নয় এমন ছক্কার একবিন্দু যুক্ত ঘটনাগুলির ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চেষ্টা করব। আমরা ছক্কা ফেলার পরীক্ষাটি ওই নিখুঁত নয় ছক্কাটি নিয়ে বার বার করে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চেষ্টা করব। এই পদ্ধতি পরিসংখ্যাভিত্তিক ব্যাখ্যা (frequency interpretation) নামে পরিচিত।

এই পক্ষপাতযুক্ত ছক্কাটির ক্ষেত্রে A = {3} এই একবিন্দুযুক্ত ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চাই। প্রথমে আমি ওই ছক্কাটি 10 বার ফেললাম এবং {3}, 4 বার পড়ল এবং পরে আবার ছক্কাটি 20 বার ফেললাম এবং {3}, 6 বার পড়ল। এইভাবে আমি ছক্কাটি 30 বার ফেললাম এবং {3}, 8 বার পড়ল এইভাবে আমি 40 বার, 50 বার, 60 বার এই ছক্কাটি ফেলতে থাকলাম এবং {3} কবার পড়ে গুনলাম এবং প্রতিবারই আমি একটি করে ভগ্নাংশ সংখ্যা পেতে থাকলাম তারা হলো যথাক্রমে : $\frac{4}{10}, \frac{6}{20}, \frac{8}{30}, ...$

আমি যদি এই সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় স্থাপন করি তাহলে দেখব ওই ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলি ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে জড়ো হচ্ছে। ওই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিকেই A = {3} ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা ধরা হয়। সম্ভাবনার এই সংজ্ঞাটিকে পরিসংখ্যাভিত্তিক সংজ্ঞা (Frequency definition) বলা হয়। এক্ষেত্রে হয়তো A = {3} ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$ হবে।

$\frac{1}{5}$ $\frac{8}{30}$ $\frac{6}{20}$ $\frac{4}{10}$

সুষম ছক্কার ক্ষেত্রেও একই পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়।

পরিসংখ্যাভিত্তিক সংজ্ঞা (Frequency definition):

ধরি, একটি সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment) N বার করা হলো এবং এই পরীক্ষার সঙ্গে যুক্ত একটি একবিন্দুযুক্ত ঘটনা A ওই N বারের ভেতর N (A) বার ঘটলে তখন একটি ভগ্নাংশ সংখ্যা $\frac{N(A)}{N}$ পাব। N এর বিভিন্ন বড়ো বড়ো মানের জন্য এইরকম যে ভগ্নাংশগুলি পাব তারা ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে জড়ো হয় [জড়ো হবার এই বিশেষ ধর্মটিকে পরিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা (statistical regularity) বলা হয়] এবং ওই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিকে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বলা হয় ও P (A) চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অর্থাৎ $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, যখন N খুব খুব বড়ো সংখ্যা।

একটি পক্ষপাতযুক্ত ছক্কা 10000 বার ফেলা হলো এবং এক বিন্দুযুক্ত ঘটনাগুলি কবার করে পড়েছে তা একটি ছকে লেখা হলো : (এখানে N = 10000)

একবিন্দু যুক্ত ঘটনা	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
পরিসংখ্যা অর্থাৎ N(A)	1300	1000	2000	3500	1700	500

পরিসংখ্যা ভিত্তিক সংজ্ঞা অনুযায়ী একবিন্দুযুক্ত ঘটনাগুলির ঘটার সম্ভাবনা পাব:

$P(\{1\}) = \frac{1300}{10000} = \frac{13}{100}$ $\qquad$ $P(\{4\}) = \frac{3500}{10000} = \frac{7}{20}$

$P(\{2\}) = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $P(\{5\}) = \frac{1700}{10000} = \frac{17}{100}$

$P(\{3\}) = \frac{2000}{10000} = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $P(\{6\}) = \frac{500}{10000} = \frac{1}{20}$

দেখছি: $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$

$= \frac{13}{100} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{7}{20} + \frac{17}{100} + \frac{1}{20} = 1$

যদি এইক্ষেত্রে $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$ ইত্যাদি ঘটনার অর্থাৎ ছক্কাটি ফেললে বিজোড় পড়বে বা 3-এর গুণিতক পড়বে তার সম্ভাবনা বার করতে হয়, তাহলে বিজোড় পড়ার সম্ভাবনা এবং 3-এর গুণিতক পড়ার সম্ভাবনা পাব:

$P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$

$= \frac{13}{100} + \frac{1}{5} + \frac{17}{100}$

$= \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

$P(\{3, 6\}) = P(\{3\}) + P(\{6\})$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$

যদি একটি সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment) করা হয় এবং সেই পরীক্ষার জন্য নমুনা দেশ বা ঘটনা দেশটি (Sample Space or Event Space) S হয় তবে আমরা কয়েকটি নিয়ম পাব।

সেগুলি আমরা এখানে বিবৃত করছি: (A ও B এই পরীক্ষার সঙ্গে যুক্ত দুটি ঘটনা নিলাম। অর্থাৎ $A \subseteq S$ এবং $B \subseteq S$ এবং ϕ শূন্য সেট ও A^c কে A-এর পূরক সেট ধরলাম।)

(i) $0 \le P(A) \le 1$ $\quad$ **(ii)** $P(S) = 1$ $\quad$ **(iii)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ যদি $A \cap B = \phi$ হয়।

(iv) $P(\phi) = 0$ $\quad$ **(v)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\quad$ **(vi)** $P(A^c) = 1 - P(A)$

আগের উদাহরণ এর সাহায্যে নিয়মগুলি যাচাই করি:

ধরি, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{2, 4\}$

দেখছি, (i) $0 \le P(A) \le 1$, $0 \le P(B) \le 1$, $0 \le P(C) \le 1$

$(\because 0 \le \frac{1}{2} \le 1,\ 0 \le \frac{1}{4} \le 1,\ 0 \le \frac{9}{20} \le 1)$

(ii) $P(S) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

(iii) $P(A \cup C) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{19}{20}$ এবং $P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{9}{20} = \frac{19}{20}$

$(\because A \cap C = \phi)$ $\qquad$ (iv), (v), (vi) নিজে করি।

ল্যাপলাসের (Laplace) দেওয়া সম্ভাবনার প্রাচীন বা গাণিতিক সংজ্ঞা (Classical or Mathematical definition of Probability) ও ফন্ মিসেস (Von Mises) -এর দেওয়া পরিসংখ্যাভিত্তিক সংজ্ঞার (Frequency definition of Probability) কোনোটিই ত্রুটিমুক্ত নয়। তাই পরে অঙ্কবিদ কলমোগরভ (Kolmogoroff) সম্ভাবনার স্বীকারভিত্তিক সংজ্ঞা (Axiomatic definition of Probability) দিয়ে সম্ভাবনা তত্ত্বকে ত্রুটিমুক্ত করেন। বিজ্ঞানের প্রায় সব শাখায় ও অন্যান্য শাখাতেও সম্ভাবনা তত্ত্বের গভীর প্রয়োগ দেখা যায়। আমরা পরে স্বীকারভিত্তিক সংজ্ঞার সাহায্যে সম্ভাবনা তত্ত্ব পড়ব।

মিলিয়ে দেখি (LET'S MATCH)

নিজে করি

অধ্যায় - 1

20. $\frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{15}{4}$ **21.** $\frac{7}{20}, \frac{11}{30}, \frac{23}{60}$ **22.** $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{11}{24}$ **33.** (ii) 11

34. 0.5, 0.3, 1.75, 0.32, 0.65

37. (ii) সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো (iv) সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো (v) সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো না

38. (iii) 0.2916, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা (iv) 0.136, সসীম দশমিক সংখ্যা

40. 5.875, সসীম দশমিক সংখ্যা; 2.6, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা; 0.45, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা; 1.285714, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা

41. মুলদ সংখ্যা, 0.5 সসীম দশমিক সংখ্যা এবং 0.49 আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা

অধ্যায় - 2

4. সূচক এবং নিধান **14.** (iii) 63 (iv) $\frac{1089}{64}$ (vi) 343 (vii) 256 (viii) 1296 **20.** 3^{200}
21. (ii) $\frac{1}{50}$ **23.** 32 **25.** $\frac{1}{4}$ **26.** 3

অধ্যায় - 3

10. y

অধ্যায় - 4

5. 2 **9.** $5\sqrt{5}$

নিজে করি : **4.** (i) 10 একক (ii) 11 একক (iii) 5 একক (iv) 7 একক (v) 8 একক (vi) 14 একক (vii) $5\sqrt{5}$ একক (viii) 5 একক (ix) 2 একক (x) $4\sqrt{2}$ একক

অধ্যায় - 5

5. (d) সাধারন সমাধানযোগ্য, একটি মাত্র সমাধান $x = -2, y = -3$ (e) সাধারন সমাধানযোগ্য নয়, পরস্পর সমান্তরাল (f) সাধারণ সমাধানযোগ্য, অসংখ্য সমাধান **6.** (c) পরস্পর সমান্তরাল **26.** 29

অধ্যায় - 6

6. $\angle QRS = 75^\circ$ **9.** $\angle ABO = 50^\circ, \angle ODC = 50^\circ, \angle ACB = 50^\circ, \angle CBD = 45^\circ$ **11.** 8 সেমি.
13. 5 সেমি.

নিজে করি : 6.1 : **1.** $\angle A = \angle C = 120^\circ, \angle D = 60^\circ$ **2.** $\angle PRQ = 55^\circ$ **3.** $\angle APD = 90^\circ$
4. (i) $x = 40, y = 130$; (ii) $x = 50, y = 40$

অধ্যায় - 7

নিজে করি : 7.1 : (i) $x^5+3x^3-7x^2+x+7$ (ii) x^5+x^2-1 (iii) $x^5-x^4+3x^3-6x^2+4$ (iv) $x^5+x^4-3x^3-8x^2+8$ (v) $x^5+x^4-3x^3-8x^2+x+9$ (vi) $x^4-x^2-7y^3+y-8$ (vii) $x^6+x^5+3x^4-4x^3-7x^2+6x+6$ (viii) $x^5+x^4+x^2+2x+1$

15. 3; 3 ও 16; 7 ও 6; f (y), g (v) ও t(x)-এর মাত্রাগুলি যথাক্রমে 3, 7 ও 6

20. অসংজ্ঞাত **21.** (i) 4 (ii) 3 (iii) 2 **22.** (vi) বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 0. **31.** –127

36. 2, –1, 0 **47.** –2 **48.** $-3\frac{1}{2}$ **50.** f (2) = 0 **52.** – 8 **57.** 5

অধ্যায় - 8

7. $(x-1)(x+3)(x-2)$; $(x-1)(x^2+2x+1)$

10. $(2a-1)(4a^2+2a+3)$; 1, $2a-1$, $4a^2+2a+3$, $(2a-1)(4a^2+2a+3)$

অধ্যায় - 9

প্রয়োগ : 2. PQ=3 সেমি. , $\angle APQ=60^\circ$

অধ্যায় - 10

1.7.

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি	বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ/ক্ষতি
400 টাকা	475 টাকা	75 টা. লাভ	$18\frac{3}{4}$ লাভ	$15\frac{15}{19}$ লাভ
125 টাকা	150 টাকা	25 টা. লাভ	20 লাভ	$16\frac{2}{3}$ লাভ
750 টাকা	700 টাকা	50 টা. ক্ষতি	$6\frac{2}{3}$ ক্ষতি	$7\frac{1}{7}$ ক্ষতি

3. (i) 75 টাকা (ii) সরল সম্পর্ক (iii) 32 টাকা (iv) 100 টাকা (v) 72 টাকা (vi) 20

4. (i) সরল সম্পর্ক (ii) 30 টাকা (iii) 60 টাকা (iv) 40 টাকা (v) $33\frac{1}{3}$

18.

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ধার্যমূল্য	ধার্যমূল্যের উপর ছাড়	শতকরা লাভ/ক্ষতি
140 টাকা	144 টাকা	160 টাকা	10%	$2\frac{6}{7}$ লাভ
260 টাকা	285 টাকা	300 টাকা	5 %	$9\frac{8}{13}$ লাভ
350 টাকা	340 টাকা	400 টাকা	15 %	$2\frac{6}{7}$ ক্ষতি
420 টাকা	480 টাকা৷	500 টাকা	4 %	$14\frac{2}{7}$ লাভ
600 টাকা	630 টাকা	700 টাকা	10 %	5 লাভ

21. 2592 টাকা, 35.2%

অধ্যায় - 11

6.

মাসিকভাড়া (টাকা)	ট্যালিমার্ক	পরিসংখ্যা (দোকানের সংখ্যা)
305 — 385	𝍸 I	6
385 — 445	IIII	4
445 — 525	𝍸 I	6
525 — 605	III	3
605 — 685	𝍸 I	6
685 — 765	𝍸 II	7
765 — 845	𝍸 III	8
মোট পরিসংখ্যা		40

নিজে করি : 11.1 : (i) 12 (ii) 23 (iii) 20

অধ্যায় - 15

নিজে করি : 15.1 **(i)** 66 সেমি. **(ii)** 57.4 সেমি. **(iii)** 39.6 সেমি. **(iv)** 61 সেমি. **(v)** 63 সেমি.

নিজে লিখি : **8.** 13 সেমি.

নিজে করি : 15.2 **1.** 80 মিটার **2.** 2232 টাকা **3.** (i) 60 সেমি., 20 সেমি. (ii) 36 সেমি., 12 সেমি. (iii) 39 সেমি., 13 সেমি. (iv) 66 সেমি., 22 সেমি. (v) 30 সেমি., 10 সেমি. (vi) 45 সেমি., 15 সেমি.

17. $4\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **24.** 84 বর্গ মিটার

নিজে করি : 15.3 **1.** (i) 30 বর্গ সেমি. (ii) $9\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. (iii) $8\sqrt{5}$ বর্গ সেমি. (iv) $(30+20\sqrt{3})$ বর্গ সেমি. **2.** 55.25 সেমি. **3.** 72 বর্গ সেমি. **4.** 56 মিটার **5.** 16.9

34. 105 বর্গ সেমি. **38.** 96 বর্গ সেমি.

অধ্যায় - 16

2. 44 সেমি., $62\frac{6}{7}$ সেমি. **3.** $94\frac{2}{7}$ মিটার, $100\frac{4}{7}$ মিটার **8.** (b) 84 মিটার **10.** 250 বার **12.** 3.5 মিটার

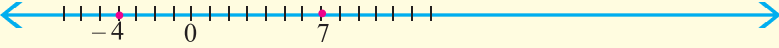
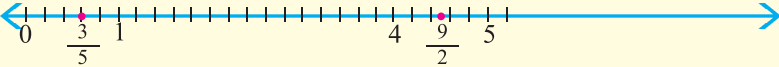
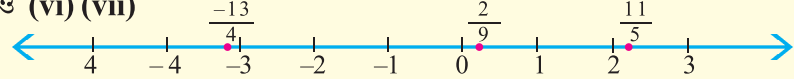
অধ্যায় - 17

নিজে করি : 17.1 **1.** ভিতর **2.** বাহিরে **3.** কোনো বাহুর উপর কোনো বিন্দুতে **17.2** **1.** 5 সেমি. **2.** 20 সেমি.

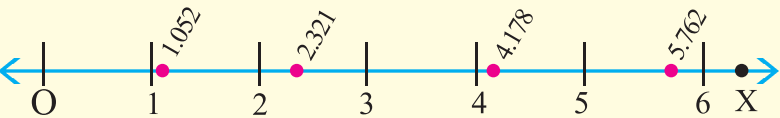
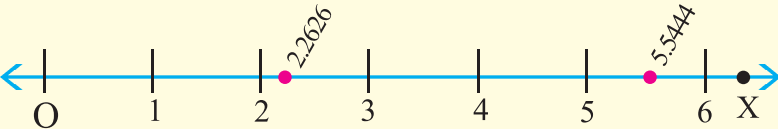
অধ্যায় - 18

3. 1386 বর্গ সেমি. **5.** 7 ডেসিমি. **7.** 154 বর্গ মিটার **9.** 2464 বর্গ সেমি. **11.** 15400 বর্গ মিটার **24.** 693 বর্গ মিটার **25.** (iii) 66 সেমি., 108 সেমি., 693 বর্গ সেমি. **27.** 3.78 বর্গ মিটার **30.** (i) 74.29 মিটার (প্রায়), 95.54 বর্গ মিটার (প্রায়) (ii) 62.61 সেমি. (প্রায়), 126 বর্গ সেমি.

অধ্যায় - 19

3. (18, 8) **6.** (3, 2)

অধ্যায় - 21

16. 5

মিলিয়ে দেখি (LET'S MATCH)

কষে দেখি - 1.1

1. যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q\neq0$ সেই সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে।
$\frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{11}{13}$ (অন্য চারটিও নিতে পারি)

2. হ্যাঁ, $0=\frac{0}{1}$

3. **(i)** ও **(ii)**

(iii) ও **(iv)**

(v) ও **(vi) (vii)**

$-\frac{13}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{11}{5}$

4, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

4. **(i)** $\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2}$ **(ii)** $\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ **(iii)** $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ **(iv)** $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{7}{24}$

(v) $\frac{(-2)+(-1)}{2}=-\frac{9}{2}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

5. $4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}, 4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}, 4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

6. $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, 4+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

7. $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{9}{40}$, $\frac{\frac{1}{5}+\frac{9}{40}}{2}=\frac{17}{80}$, $\frac{\frac{9}{40}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{19}{80}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

8. **(i)** T **(ii)** F **9.** মূলদ সংখ্যা

কষে দেখি - 1.2

1. **(i)** সত্য **(ii)** মিথ্যা **(iii)** সত্য **(iv)** মিথ্যা **(v)** সত্য **(vi)** মিথ্যা

2. যে সব বাস্তব সংখ্যাদের $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায় না, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q\neq0$, সেই সব বাস্তবসংখ্যাদের অমূলদ সংখ্যা বলে।
$\sqrt{2}, \sqrt{3}$, e, π (অন্য উত্তরও সম্ভব)

3. মূলদ— **(i), (ii), (v), (vi),** অমূলদ— **(iii), (iv), (vii), (viii), (ix)**

কষে দেখি 1.3

1. **সসীম** (i), (iv) **অসীম** (ii), (iii), (v)

2. **(i)** $0.\dot{0}\dot{9}$, **(ii)** 0.625, **(iii)** $0.\dot{2}3076\dot{9}$ **(iv)** 3.125 **(v)** $0.\dot{1}\dot{8}$ **(vi)** 0.28

3. **(i)** $\frac{1}{3}$ **(ii)** $\frac{4}{3}$ **(iii)** $\frac{49}{90}$ **(iv)** $\frac{34}{99}$ **(v)** $\frac{311}{99}$ **(vi)** $\frac{8}{45}$ **(vii)** $\frac{43}{90}$ **(viii)** $\frac{6}{11}$ **(ix)** $\frac{1}{999}$ **(x)** $\frac{163}{999}$

4. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

5. 0.80 800 8000 80000 8......, 0.85 855 8555 85555 8 ......, (অন্য উত্তরও সম্ভব)
0. 91 911 9111 91111 9 ....,

6. 0.121221222122221 ...., 0.373773777377779 ....., (অন্য উত্তরও সম্ভব)

7. মূলদ → (ii), (iii) অমূলদ → (i), (iv)

8.

9.

10. 0.22, 0.23 (অন্য উত্তরও সম্ভব) **11.** 0.2, 0.21 (অন্য উত্তরও সম্ভব)

14. **(i)** (c) **(ii)** (d) **(iii)** (d) **(iv)** (c) **(v)** (c) **15.** **(i)** $(\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) = 0$ **(ii)** $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

(iii) $\dfrac{\frac{1}{7} + \frac{2}{7}}{2} = \dfrac{3}{14}$

(iv) 0.151551555155551 .....

(v) $\frac{37}{3000}$ (15-এর সব অঙ্কগুলোর অন্য উত্তরও সম্ভব) **(vi)** (d)

কষে দেখি— 2

1. **(i)** $2^{-\frac{9}{2}}$ **(ii)** 10 **(iii)** 2

2. **(i)** $\frac{1}{4}$ **(ii)** x **(iii)** 2 **(iv)** $\sqrt[3]{abc}$ **(v)** 8 **(vi)** 8 **(vii)** 1

3. **(i)** $10^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{2}}$ **(ii)** $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{4}}$ **(iii)** $5^{24}, 2^{60}, 4^{36}, 3^{48}$

9. **(i)** $x = 1\frac{1}{2}$ **(ii)** (a) x = 1 **(iii)** x = 3 **(iv)** $x = \frac{2}{9}$ **(v)** x = **(vi)** x = 1
(vii) x = 4

10. **(i)** (b) 3 **(ii)** (c) 4 **(iii)** (b) $\frac{9}{2}$ **(iv)** (c) 49 **(v)** (d) 27

11. **(i)** 4:3 **(ii)** x = 3 **(iii)** x = 7 **(iv)** $\frac{1}{2}$ **(v)** 3^{3^3} বৃহত্তর [$\because 3^{27} > 3^9$]

কষে দেখি 3.1

1.

বিন্দু	(3, –2),	(–4, 2)	(4, 5)	(–5, –5)	(–2, 7)	(7, –7)	(0, 9)	(0, –9)
x-অক্ষের উপরে/নীচে	নীচে	উপরে	উপরে	নীচে	উপরে	নীচে	উপরে	নীচে

2.

বিন্দু	(5, –7),	(10, 10)	(–8, –4)	(4, 3)	(–6, 2)	(11, –3)	(4, 0)	(–4, 0)
y-অক্ষের ডান /বাম	ডান	ডান	বাম	ডান	বাম	ডান	ডান	বাম

3. তৃতীয়পাদে, y-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে, x-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে, তৃতীয়পাদে, চতুর্থপাদে, প্রথমপাদে, y-অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে, x-অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে। 7. (7, 5)

কষে দেখি — 3.2

1. **(i)** x-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে **(ii)** y-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে **(iii)** x-অক্ষের উপর ঋণাত্মকদিকে **(iv)** y-অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে **(v)** প্রথম পাদে **(vi)** দ্বিতীয় পাদে **(vii)** চতুর্থপাদে **(viii)** তৃতীয় পাদে

3. **(i)** $3x + 2y = 55$

$4x + 3y = 75$

(ii) $x + y = 80$

$3(x - y) - x = 20$

[ধরি বড়ো সংখ্যাটি x এবং ছোট সংখ্যাটি y]

(iii) $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$

$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2}$

(iv) $x = 2y$

$(10x + y) - (10y + x) = 27$

4. **(i)** $x - y = 26$ **(ii)** $x + y = 15$ **(iii)** $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$

(iv) $2 \times (x + y) = 80$ **(v)** $5x = 8y$

6. **(i)** $x - y = 16$

$x + 8 = 2(y + 8)$

রজতের বয়স 8 বছর এবং রজতের মামার বয়স 24 বছর

(ii) $x + y = 15$

$x - y = 3$

সংখ্যা দুটি 9 ও 6

(iii) $\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{3}$

$\frac{x-4}{y-2} = \frac{1}{2}$

ভগ্নাংশটি $\frac{5}{4}$

(iv) $2(x + y) = 60$

$(x + 2).(y - 2) = xy - 24$

দৈর্ঘ্য 20 মিটার, প্রস্থ 10 মিটার

(v) $16(x + y) = 96$

$8(x - y) = 16$

নৌকার বেগ 4 কিমি./ঘণ্টা

স্রোতের বেগ 2 কিমি./ঘণ্টা

7. **(i)** (0,5) **(ii)** (–2, 5) **(iii)** (7, 5) **(iv)** (7, 1)

8. **(i)** $x = 1$, $y = 1$ **(ii)** $x = 2$, $y = 1$ (iii) $x = 1$, $y = 1$ **(iv)** $x = 3$, $y = 2$ (v) $x = 1$, $y = 2$

9. $x=2, y=3$ **10.** 24 বর্গ একক **11.** 6 বর্গ একক

12. $x = -2$ -এর জন্য $y = 0$ এবং $x = 7$ -এর জন্য $y = 3$ হবে। **13.** $x = 3$

14. **(i)** (b) **(ii)** (a) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** (d)

15. **(i)** (6, 0) **(ii)** (0, – 4) **(iii)** 6 বর্গ একক **(iv)** x-অক্ষ থেকে দূরত্ব 8 একক এবং y-অক্ষ থেকে দূরত্ব 6 একক **(v)** 45^0

কষে দেখি— 4

1. **(i)** 25 একক **(ii)** 5 একক **(iii)** $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

2. **(i)** 5 একক **(ii)** 13 একক **(iii)** 2.5 একক **(iv)** 13 একক **(v)** $\sqrt{85}$ একক **(vi)** 5 একক

6. 10 একক **8.** $y = -15$ বা -3 **9.** (6,0)

15. **(i)** (b) $2\sqrt{b^2 + d^2}$ **(ii)** (a) 0 অথবা, 6 **(iii)** (c) ± 3 **(iv)** (d) সমকোণী সমদ্বিবাহু **(v)** (a) 5 একক

16. **(i)** ± 3 **(ii)** (0,4) **(iii)** (3,0) ও (0,3) **(iv)** (1,2) ও (3,–2) **(v)** (2,5) ও (–2,10)

[**16.** **(iii), (iv), (v)** -এর ক্ষেত্রে অন্য স্থানাঙ্কও হতে পারে]

কষে দেখি - 5.1

1. **(b)** একটি সাধারণ সমাধান পাবো। **(c)** বাবার বয়স 42 বছর এবং দিদির বয়স 13 বছর

2. **(b)** অসংখ্য সাধারণ সমাধান পাবো। **(c)** অসংখ্য সমাধান অর্থাৎ 1টি পেনের দাম 10 টাকা হলে 1টি পেনসিলের দাম 3টাকা, আবার 1টি পেনের দাম 6 টাকা হলে 1টি পেনসিলের দাম 6 টাকা ......

3. **(b)** কোনো সাধারণ সমাধান পাবো না।
(c) 1টি আর্ট পেপার ও 1টি স্কেচ পেনের আলাদা আলাদা দাম পাবো না।

কষে দেখি - 5.2

1. **(b)** সমাধান যোগ্য, $x= 2, y =1$ **(b)** সমাধান যোগ্য, অসংখ্য সমাধান, $x = 2, y = -3; x = 3, y=1; x = 4, y =5;$ .... **(c)** সমাধান যোগ্য নহে **(d)** সমাধান যোগ্য, $x = \frac{53}{20}$, $y = -\frac{1}{4}$

2. **(a)** সমাধান যোগ্য নহে **(c)** সমাধানযোগ্য এবং একটিমাত্র সাধারণ সমাধান আছে। **(c)** সমাধানযোগ্য এবং অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে। **(d)** সমাধানযোগ্য এবং অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে।

3. **(a)** পরস্পরছেদী **(b)** সমাপতিত হয়েছে **(c)** পরস্পর সমান্তরাল **(d)** পরস্পরছেদী

4. **(a)** সমাধানযোগ্য, অসংখ্য সমাধান, $x = 5, y = 0; x = -1, y =8; x = 2, y =4;$ .... **(b)** সমাধানযোগ্য নহে **(c)** সমাধানযোগ্য, $x = 2, y =4$ **(d)** সমাধানযোগ্য, $p = 9,\ q = 6$ **(e)** সমাধানযোগ্য নহে **(f)** সমাধানযোগ্য নহে।

কষে দেখি - 5.3

1. **(a)** $x = 2, y = -1$ **(b)** $x = 2, y = 1$

2. 3

3. $4x - 3y = 16$ কে 3 দিয়ে এবং $6x + 5y = 62$ কে 2 দিয়ে গুণ করতে হবে।

4. **(i)** $x = 4, y = -3$ **(ii)** $x = 7, y = 6$ **(iii)** $x = 36, y = 12$ (iv) $x = 12, y = 6$ (v) $x = 2, y = 2$
(vi) $x = 1\frac{1}{5}, y = 1\frac{1}{5}$ **(vii)** $x = 7, y = 9$ **(viii)** $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{7}$ **(ix)** $x = 1\frac{1}{4}, y = 1$
(x) $x = 4, y = 3$ **(xi)** $x = 20, y = 3$, **(xii)** $x = a, y = b$ **(xiii)** $x = a, y = b$ **(xiv)** $x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$, $y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)}$ **(xv)** $x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2}$ (xvi) $x = 1, y = 1$

কষে দেখি - 5.4

1. $x = 3\left(8 - \frac{y}{2}\right)$

2. $y = \frac{7x}{x-2}$

3. **a)** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 1, y = 1$ **b)** $x = 1\frac{1}{5}, y = 1\frac{1}{5}$ **c)** $x = 51, y = 62$

4. $x = 3, y = 2$

5. **(i)** $x = 4, y = 5$ **(ii)** $x = 10, y = 4$ **(iii)** $x = 8, y = 5$ **(iv)** $x = 7, y = 9$ **(v)** $x = 6, y = 5$
(vi) $x = \frac{3}{2}, y = 2$ **(vii)** $x = 6, y = 2$ **(viii)** $x = 2, y = 3$ **(ix)** $x = 2, y = \frac{2}{3}$
(x) $x = 12, y = 8$ **(xi)** $x = 4, y = 4$, **(xii)** $x = -2, y = 3$

কষে দেখি - 5.5

1. $x = \frac{2y}{y-3}$ **2.** $x = 3$ **3. (a)** $x = 2, y = -1$ **(b)** $x = 2, y = 3$ **4. (a)** $x = \frac{1}{4}, y = 6$
(b) $x = 2, y = 3$ **(c)** $x = 1, y = \frac{1}{2}$ **(d)** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{5}$

5. **(i)** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **(ii)** $x = 1, y = 1$ **(iii)** $x = \frac{6}{5}, y = \frac{6}{5}$ **(iv)** $x = 6, y = 8$ **(v)** $x = 4, y = 10$
(vi) $x = 8, y = 5$ **(vii)** $x = 7, y = 9$ **(viii)** $x = p + q, y = q - p$

কষে দেখি - 5.6

1. $x = 2,\ y = -1$ **2.** $x = 3,\ y = 2$ **3.** $x=1,\ y=2$ **4.** $x = 4,\ y = -1$ **5.** $x = 16,\ y = -4$
6. $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{5}$ **7.** $x=5,\ y=9$ **8.** $x = 16,\ y = 4$ **9.** $x = 21,\ y = 24$
10. $x = a + b,\ y = b - a$ **11.** $x = a + b,\ y = b - a$ **12.** $x = a,\ y = b$
13. $x = \frac{a}{a^2 + b^2},\ y = \frac{b}{a^2 + b^2}$

কষে দেখি - 5.7

1. 1 টি পেন 5 টাকা, 1 টি পেনসিল 3 টাকা **2.** আয়েশা 40 কিগ্রা., রফিক 45 কিগ্রা.

3. কাকাবাবু 40 বছর, বোন 20 বছর **4.** পাঁচটাকার নোট 22টি, দশ টাকার নোট 48 টি

5. ভগ্নাংশটি $\frac{12}{17}$ **6.** সংখ্যাদুটি 15 ও 18 **7.** লালিমা 12 দিনে, রমেন 9 দিনে

8. প্রথম দ্রবণ $77\frac{7}{9}$ লিটার, দ্বিতীয় দ্রবণ $72\frac{2}{9}$ লিটার **9.** অখিলবাবু 235টি, ছন্দাদেবী 160টি

10. দৈর্ঘ্য 15 মিটার,প্রস্থ 12 মিটার **11.** মেরির 160 টাকা, ঈশানের 120 টাকা **12.** 12 জন গিয়েছিল, 180 টাকা দিয়েছিলেন **13.** 1 টাকার মুদ্রা 200 টি,50 পয়সার মুদ্রা 300টি **14.** দূরত্ব 540 কিমি., গতিবেগ 36 কিমি./ঘণ্টা **15.** সংখ্যাটি 35 **16.** সংখ্যাটি 95 **17.** নৌকার বেগ 4 মাইল/ঘণ্টা, স্রোতের বেগ 1 মাইল/ঘণ্টা **18.** দূরত্ব 100 কিমি., গতিবেগ 25 কিমি./ঘণ্টা **19.** সংখ্যাটি 96

20. মোট কমলালেবু 1200টি এবং বাক্স 15 টি **21.** **(i)** $t = -3$ **(ii)** $k = -5$ **(iii)** $x = 5,\ y = 5$ **(iv)** $x = 1,\ y = -2$ **(v)** $r = 3$ (vi) $y = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)x + \left(-\frac{c_1}{b_1}\right)$ **(vii)** $k \neq 24$ **(viii)** $a = -\frac{13}{9},\ b = \frac{1}{3}$

22. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** a **(vi)** (c)

কষে দেখি - 6

16. **(i)** (c) **(ii)** (d) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** (a)

17. **(i)** $\angle A = 108° = \angle C,\ \angle B = 72° = \angle D$ **(ii)** 4 সেমি. **(iii)** 150° **(iv)** 75° **(v)** 4 সেমি.

কষে দেখি - 7.1

1. **(i)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 6 **(iii)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 3 **(v)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 51 **(vii)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 0 **(viii)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা অসংজ্ঞাত **(x)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 3 **(xi)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 2

2. **(i)** একচল বিশিষ্ট একঘাত সংখ্যামালা **(vi)** একচল বিশিষ্ট একঘাত সংখ্যামালা। **(v)** একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সংখ্যামালা **(ii)** একচল বিশিষ্ট ত্রিঘাত সংখ্যামালা **(iv)** একচল বিশিষ্ট ত্রিঘাত সংখ্যামালা

3. **(i)** 5 **(ii)** –1 **(iii)** 0 **(iv)** $\sqrt{11}$ **4.** **(i)** 4 **(ii)** 1 **(iii)** 0 **(iv)** 3 **(v)** 1 **(vi)** 19

5. $x^{17}+1, 2y^{17}-9$ (অন্য উত্তর সম্ভব) **6.** $x^4, 7y^4$ (অন্য উত্তর সম্ভব)

7. $x^3+x^2+1, 7y^3-9x^2-5$ (অন্য উত্তর সম্ভব)

8. **(i), (ii), (iii), (iv), (v)** বহুপদী সংখ্যামালা

(i) একচল বিশিষ্ট, **(ii), (iii), (iv)** এবং **(v)** দুইচল বিশিষ্ট (a কে ধ্রুবক ধরা হয়েছে।)

কষে দেখি - 7.2

1. $f(0)=-6, f(1)=4, f(3)=30$

2. **(i)** $f(1)=8, f(-1)=2$ **(ii)** $f(1)=7, f(-1)=17$ **(iii)** $f(1)=11, f(-1)=7$

(iv) $f(1)=9, f(-1)=-11$

4. **(i)** 2 **(ii)** $-\frac{2}{7}$ **(iii)** –9 **(iv)** 3, **(v)** 0 **(vi)** $-\frac{b}{a}$

কষে দেখি - 7.3

1. **(i)** 5 **(ii)** –19 **(iii)** $5\frac{3}{8}$ **(iv)** $3\frac{1}{8}$

2. **(i)** 68 **(ii)** 52 **(iii)** 6 **(iv)** 5

3. **(i)** –8 **(ii)** a

4. $P(-\frac{1}{2})=0, \therefore$ গুণিতক ।

5. 1 **6.** $4\frac{2}{3}$ **7.** 62 **9.** $a=1, b=3$ **10.** $a=\frac{2}{3}, b=\frac{-5}{3}, c=2$

11. **(i)** c **(ii)** a **(iii)** b **(iv)** d **(v)** d **12.** **(i)** $\frac{3}{2}$ **(ii)** 8 **(iii)** –3 **(iv)** 128

কষে দেখি - 7.4

1. (x+1) **(i), (ii), (iv), (vi)** -এর উৎপাদক

2. **(i)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক **(ii)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক । **(iii)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক **(iv)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক

3. $k=-1$ **4.** (i) $k=-12$ (ii) $k=\frac{3}{2}$ (iii) $k=8$ (iv) $k=-7$

5. $a=1, b=-8$ **6.** $a=1, b=0$ **7.** $a=0, b=2$ **11.** (i) c (ii) b (iii) a (iv) a (v) a

12. **(i)** $a=4$ **(ii)** $k=0$ অথবা $k=\frac{1}{27}$ **(iii)** 10 **(iv)** $p=r$ **(v)** $-\frac{3}{2}$

কষে দেখি - 8.1

1. $(x-1)(x^2+x-2)$
2. $(x+1)(x^2-x+3)$
3. $(a+2)^2(a-4)$
4. $(x-2)(x^2+2x-2)$
5. $(x+2)(x+3)(x-5)$
6. $(a-1)(4a^2-5a-2)$
7. $(x-1)(x-3)(x-5)$
8. $(a+1)(5a^2+6a-2)$
9. $(2x+1)(x^2-x+5)$
10. $(y-2)(y+3)(2y-7)$

কষে দেখি - 8.2

1. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$
2. $\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m+\frac{1}{m}-2\right)$ বা $\frac{1}{m^2}(m^2+1)(m-1)^2$
3. $(3p-4q)(3p-4q+a)$
4. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$
5. $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$
6. $(p^2+3pq-q^2)(p^2-3pq-q^2)$
7. $(a-b+c)(a-b-c)$
8. $(3a-2b)(3a+2b+2c)$
9. $(a-2c)(a-6b+2c)$
10. $(3a+b+c)(a+b-c)$
11. $(x+y-4a)(x-y-2a)$
12. $(a+3b-2c-5d)(a-3b-2c+5d)$
13. $(a+b+c)(3a-b-c)$
14. $(x+149)(x-151)$
15. $(ax-bx+ay+by)(ax+bx-ay+by)$

কষে দেখি - 8.3

1. $(t-2)(t^2+2t+4)(t^6+8t^3+64)$
2. $(3p+q)(3p-q)(9p^2-3pq+q^2)(9p^2+3pq+q^2)$
3. $(2p+1)(4p^2-38p+127)$
4. $\left(\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{4}{b^2}\right)$
5. $2(a-b)(a^2+ab+b^2)(4a^6-2a^3b^3+b^6)$
6. $A(R-r)(R^2+Rr+r^2+Rh+rh)$
7. $(a+b-2)(a^2+2ab+b^2+2a+2b+4)$
8. $4x(2x-5)(4x^2+10x+25)$
9. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2-2x)$
10. $(x-5)(x^2-x+7)$

কষে দেখি - 8.4

1. $(x+y+4)(x^2+y^2+16-xy-4y-4x)$
2. $(2x-y+1)(4x^2+y^2+1+2xy+y-2x)$
3. $(2a-3b-1)(4a^2+9b^2+1+6ab-3b+2a)$
4. $(1+2x-3y)(1+4x^2+9y^2-2x+6xy+3y)$
5. $3(3a-2b)(2b-5c)(5c-3a)$
6. $3(2x-y)(x+y)(x-2y)$
7. $(a^2+2a-4)(a^4-2a^3+8a^2+8a+16)$
8. $(a^2+3a+5)(a^4-3a^3+4a^2-15a+25)$
9. $3pqr(p-q)(q-r)(r-p)$
10. $\left(p+\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\right)\left(p^2+\frac{1}{p^2}-\frac{8}{9}+\frac{1}{3p}+\frac{p}{3}\right)$

কষে দেখি - 8.5

1. **(i)** $(a+b-3)(a+b-2)$ **(ii)** $(x-1)(3x+5)(3x^2+2x-4)$ **(iii)** $(x^2+x+2)(x^2+x-4)$ **(iv)** $2b^2(15b^2-a^2)$ **(v)** $(x^2+5x+1)(x^2+3x+1)$ **(vi)** $(x-1)(ax-x+a-2)$ **(vii)** $(x+ay+y)(ax-x+y)$ **(viii)** $(x-p+2q)(x+p-3q)$ **(ix)** $(a-2)\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}+1\right)$ **(x)** $(xy-y+x)(xy-x-1)$
2. **(i)** (c) **(ii)** (d) (iii) (b) **(iv)** (d) **(v)** (a)
3. **(i)** $(a+b)(b+c)(c+a)$ **(ii)** $a=b=c$ **(iii)** $a=-15, b=-1$. (অন্য উত্তর সম্ভব) **(iv)** 0 **(v)** $a=3, p=-7$

কষে দেখি - 9

15. **(i)** (b) **(ii)** (c) **(iii)** (d) **(iv)** (b) **(v)** (b)
16. **(i)** 2 সেমি. **(ii)** 51 সেমি **(iii)** 5 সেমি. **(iv)** 6 সেমি. **(v)** 3 সেমি.

কষে দেখি - 10.1

1. ₹ 625, ₹ 125; ₹ 279, ₹ 21; ₹ 1150, ₹ 100; ₹ 20000, ₹ 3000 **2.** **(a)** সরল সমানুপাতী **(b)** ₹ 75 **(c)** ₹ 100 **(d)** শতকরা লাভ 25 **(e)** শতকরা লাভ 20 **3.** ₹ 200 **4.** $16\frac{2}{3}$ **5.** ₹ 800 **6.** ₹ 290 **7.** ₹ 300 **8.** $33\frac{1}{3}$ **9.** শতকরা লাভ 8 **10.** ₹ 200 **11.** 8 টি **12.** ₹ 350, ₹ 1050 **13.** লাভ শতকরা $12\frac{1}{2}$ **14.** 13.5 **15.** 15 **16.** ₹ 6 **17.** ₹ 4 ক্ষতি **18.** $44\frac{4}{9}$ **19.** প্যান্ট ₹ 360, জামা ₹ 250 **20.** 25 **21.** 2 : 1

কষে দেখি - 10.2

1. সুবলবাবু 20% লাভ, সাহানাবিবি 10% লাভ, উৎপলবাবু 12% লাভ
(i) ₹ 9000 **(ii)** ₹ 3696 **(iii)** $47\frac{21}{25}$
2. **(i)** ₹ 80 **(ii)** ₹ 241.50 **(iii)** ₹ 122.50 **(iv)** ₹ 262.50 **(v)** ₹ 184
3. **(i)** 15 **(ii)** 15 **(iii)** 20 **(iv)** 58.7 **(v)** ₹ 301.35
4. **(i)** (d) **(ii)** (a) **(iii)** (b) **(iv)** (a) **(v)** (b)
5. **(i)** $16\frac{2}{3}$ **(ii)** 25 **(iii)** $9\frac{1}{11}$ **(iv)** ₹ 360 **(v)** ₹ 576 **(vi)** 28%

কষে দেখি - 11.1

1.

শ্রেণি অন্তর	শ্রেণি সীমা	শ্রেণি দৈর্ঘ্য	শ্রেণি পরিসংখ্যা
0 – 2	0 – 2	2	11
2 – 4	2 – 4	2	17
4 – 6	4 – 6	2	9
6 – 8	6 – 8	2	3

2.

শ্রেণি অন্তর	শ্রেণি সীমা	ট্যালি মার্ক	শ্রেণি পরিসংখ্যা
1 – 10		𝍸 |	6
11 – 20		𝍸 |||	8
21 – 30		𝍸 𝍸 |	11
31 – 40		𝍸 ||	7
41 – 50		𝍸 |||	8
			মোট পরিসংখ্যা = 40

3.

শ্রেণি সীমা	ট্যালি মার্ক	শ্রেণি পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
30 – 40	||||	4	4
40 – 50	~~||||~~ |	6	10
50 – 60	|||	3	13
60 – 70	||||	4	17
70 – 80	~~||||~~ |||	8	25
80 – 90	~~||||~~ ||	7	32
90 – 100	|||	3	35
100 – 110	|||	3	38
110 – 120	||	2	40
		মোট পরিসংখ্যা = 40	

4.

শ্রেণি সীমা	ট্যালি মার্ক	শ্রেণি পরিসংখ্যা
50 – 60	||	2
60 – 70	~~||||~~ |	6
70 – 80	||||	4
80 – 90	||||	4
90 – 100	~~||||~~ ||	7
100 – 110	~~||||~~ ||	7
110 – 120	~~||||~~ |	6
120 – 130	~~||||~~ ||	7
130 – 140	||	2
		মোট পরিসংখ্যা = 40

5.

বয়স (বছরে)	রোগীর সংখ্যা পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (বৃহত্তর সূচক)
10 – 20	80	300
20 – 30	40	220
30 – 40	50	180
40 – 50	70	130
50 – 60	40	60
60 – 70	20	20

6.

শ্রেণি	10-এর কম	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	17	5	7	8	13	10

7.

প্রাপ্ত নম্বর	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60-এর বেশি
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	8	5	12	35	24	16	0

8. **(i)** (a) **(ii)** (d) **(iii)** (b) **(iv)** (b) **(v)** (b)

9. **(a)** 2m – u **(b)** 37 – 47 **(c)** 0.6 **(d)** 0.4 **(e)** চল— (i), (ii), (iv), গুণ— (iii), (v)

কষে দেখি - 11.2

12. **(i)** (c) **(ii)** (c) **(iii)** (b) **(iv)** (d) **(v)** (d)

কষে দেখি - 12

21. **(i)** (c) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (d) **(v)** (a)

22. **(i)** 7.5 সেমি. **(ii)** 25 বর্গ একক **(iii)** 1 : 6 **(iv)** 10 বর্গ সেমি. **(v)** 1 : 1

কষে দেখি— 15.1

1. **(i)** 400 বর্গ মিটার **(ii)** ₹1500 **(iii)** 480
2. **(i)** 51 বর্গমিটার **(ii)** 111 বর্গমিটার **(iii)** 264 বর্গমিটার **(iv)** 252 বর্গমিটার **(v)** 882 বর্গমিটার
3. 6912 বর্গ মিটার **4.** ₹680 **5.** 25 মিটার ও 20 মিটার **6.** ₹17982 **7.** 1.5 মিটার
8. 2500 বর্গ সেমি. **9.** ₹4949 **10.** 3মিটার **11.** 38 সেমি. **12.** 196 বর্গ মিটার এবং 19.796 মিটার
13. 80 মিটার, ₹8000 **14.** $\sqrt{193}$ মিটার, $(19 + \sqrt{193})$ মিটার **15.** ₹1,12,500
16. 288 বর্গ মিটার, **17.** 42 মিটার, 108 বর্গ মিটার, **18.** 5 মিটার × 5 মিটার, 924 টি
19. **(i)** (b) 144 বর্গ সেমি. **(ii)** (a) $A_1:A_2 = 1:2$ **(iii)** (c) 600 **(iv)** (b) S >R **(v)** (b) 15 সেমি.
20. **(i)** শতকরা 21 বৃদ্ধি পাবে। **(ii)** শতকরা 1 হ্রাস পাবে। **(iii)** 3 সেমি. **(iv)** 8 সেমি. **(v)** 13 সেমি.

কষে দেখি— 15.2

1. $25\sqrt{3}$ বর্গ সেমি., $8\sqrt{21}$ বর্গ সেমি., 13.5 বর্গ সেমি., 247.5 বর্গ সেমি., $304\sqrt{5}$ বর্গ সেমি.
2. $64\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **3.** 30 সেমি., $25\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **4.** $8\sqrt{6}$ বর্গ সেমি. **5.** 48 বর্গ সেমি. **6.** 13872 বর্গ সেমি.
7. 72 বর্গ সেমি. **8.** 5 সেমি., রম্বস **9.** **(i)** $432\sqrt{15}$ বর্গ মিটার **(ii)** $9\sqrt{15}$ মিটার **10.** **(i)** ₹ 1680
(ii) ₹ 1422 **11.** $300\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **12.** $100\sqrt{2}$ বর্গ সেমি. **13.** 100 বর্গ সেমি. **14.** 1 সেমি., 0.25 বর্গ সেমি. **15.** 2.89 মিনিট(প্রায়) **16.** 1.5 মিটার **17.** 180 সেমি. **18.** 30 বর্গ সেমি. **19.** 4.615 সেমি.(প্রায়) **20.** $1\frac{5}{7}$সেমি. **21.** **(i)** (d) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (b) **(v)** (a) **(vi)** (c) **22.** **(i)** 2 একক
(ii) শতকরা 300 বৃদ্ধি পায় **(iii)** শতকরা 800 বৃদ্ধি পায় **(iv)** 10 সেমি. **(v)** $1 : \sqrt{3}$

কষে দেখি— 15.3

1. 20 বর্গ সেমি. **2.** 14 সেমি. ও 7 সেমি. **3.** 168 বর্গ মিটার **4.** 12 সেমি. **5.** 6 সেমি. **6.** 50 মিটার, 150 বর্গ মিটার, 12 মিটার **7.** 2420 বর্গ মিটার **8.** 24 বর্গ সেমি. **9.** 60 ডেকামিটার, 80 ডেকামিটার **10.** $96\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **11.** 114 বর্গ মিটার **12.** 88 বর্গ সেমি. **13.** 72.5 বর্গ সেমি. **14.** 1536 বর্গ সেমি. **15.** $\sqrt{185}$ সেমি., 88 বর্গ সেমি. **16.** 67.2 বর্গ মিটার **17.** **(i)** (b) **(ii)** (b) **(iii)** (d) **(iv)** (b) **(v)** (b)
18. **(i)** 8 সেমি. **(ii)** $3\frac{1}{3}$ সেমি. **(iii)** 20 বর্গ সেমি. **(iv)** $31\sqrt{2}$ সেমি. **(v)** 12 বর্গ সেমি.

কষে দেখি - 16

1. **(i)** $24\frac{2}{7}$ মিটার **(ii)** 64 সেমি. **2.** 220 মিটার **3.** ঘণ্টায় 59.4 কিমি. **4.** 19 মিনিট 12 সেকেন্ড
5. 10.5 সেমি. **6.** 42 মিটার **7.** 17.5 সেমি. **8.** 352 মিটারের প্রতিযোগিতা, 88 মিটারে পরাজিত করেছিল **9.** 28 সেমি. **10.** 14400 বার **11.** ঘণ্টার কাঁটা 105.6 সেমি., মিনিটের কাঁটা 2112 সেমি.
13. 28 মিটার **14.** 12 সেমি. ও 8 সেমি. **15.** 22 সেমি. **16.** 28 মিটার **17.** 330 মিটার **18.** 190 মিটার
19. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (a) **(iv)** (a) **(v)** (a) **20.** **(i)** 14 সেমি. **(ii)** 11 সেমি. **(iii)** $1 : \sqrt{2}$ **(iv)** 11 সেমি. **(v)** 11 : 14

কষে দেখি - 17

8. **(i)** 12 বর্গ সেমি. **(ii)** 6 বর্গ সেমি. **(iii)** 12 বর্গ সেমি.
9. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (b) **(iv)** (c) **(v)** (b)
10. **(i)** 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুর মধ্যবিন্দুতে **(ii)** 3 সেমি. **(iii)** চারটি বিন্দু **(iv)** 30° **(v)** 1 সেমি.

কষে দেখি - 18

1. 13.86 বর্গ মিটার **2.** 5.6 মিটার, 98.56 বর্গ মিটার **3.** 264 মিটার **4.** 154 বর্গ মিটার **5.** 14 মিটার, 88 মিটার **6.** 16:25 **7.** 1920 বর্গ মিটার, 2464 বর্গ মিটার, বৃত্ত **8.** ₹ 142800 **9.** ₹ 52360 **10.** ₹ 39424 **11.** 12474 বর্গ মিটার **12.** $29571\frac{1}{7}$ বর্গ মিটার **13.** **(i)** 56 বর্গ সেমি. **(ii)** 115.5 বর্গ সেমি. **15.** $37\frac{5}{7}$ সেমি., $30\frac{6}{7}$ বর্গ সেমি. **16.** পরিবৃত্ত 56 সেমি., 196 বর্গ সেমি.; অন্তর্বৃত্ত $28\sqrt{2}$ সেমি., 98 বর্গ সেমি. **17.** **(i)** পরিসীমা 35.83 সেমি. (প্রায়), ক্ষেত্রফল $41\frac{1}{7}$ বর্গ সেমি. **(ii)** 86 সেমি., ক্ষেত্রফল 5704.19 বর্গ সেমি.(প্রায়) **18.** 21 সেমি. **19.** 4.02 বর্গ সেমি. (প্রায়) **20.** 115.5 বর্গ সেমি. **21.** 21 সেমি. **22.** 56 বর্গ সেমি. **23.** অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সেমি., ক্ষেত্রফল $78\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি.; পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 12.5 সেমি., ক্ষেত্রফল $491\frac{1}{14}$ বর্গ সেমি. **24.** $8\sqrt{2}$ সেমি. **25.** 88 সেমি. **26.** **(i)** (b) **(ii)** (c) **(iii)** (c) **(iv)** (a) **(v)** (c) **27.** **(i)** 21 **(ii)** 75 **(iii)** $r\sqrt{x}$ মিটার **(iv)** $19\frac{9}{14}$ বর্গ সেমি. **(v)** 9 : 25 : 49

কষে দেখি— 19

1. **(i)** $(0, -\frac{26}{7})$ **(ii)** $(\frac{1}{5}, 1)$ **(iii)** (14,–19) **(iv)** (9,8)

2. **(i)** (4, 0) **(ii)** $(3, \frac{7}{2})$

3. 3:2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত **4.** 7:9 **6.** (9,6) **8.** 5 একক **9.** $\sqrt{89}$ একক, $\sqrt{17}$ একক, $5\sqrt{2}$ একক

10. (6,7), (2,–1), (–6,15). **11.** **(i)** (d) (m,l) **(ii)** (a) –1 **(iii)** (a) (3,3) **(iv)** (d) 7 **(v)** (c) x=2,y=3 **12.** **(i)** (4,3) **(ii)** (0,0) **(iii)** (0,0) **(iv)** (–1,–1) **(v)** (2,3), (7,6) এবং $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

কষে দেখি— 20

1. **(i)** 11 বর্গ একক **(ii)** $22\frac{1}{2}$ বর্গ একক **(iii)** 3 বর্গ একক

3. k -এর যে-কোনো বাস্তব মান **6.** **(i)** $20\frac{1}{2}$ বর্গ একক **(ii)** $18\frac{1}{2}$ বর্গ একক

7. 37.5 বর্গ একক, 5 একক, **8.** (– 4,–1) **9.** (1,1) **10.** 4 বর্গ একক

11. **(i)** (b) 12 বর্গ একক, **(ii)** (c) (3,2) **(iii)** (b) 6 বর্গ একক, **(iv)** (a) x = 8, y = –6 **(v)** (b) (–4,1)

12. **(i)** $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ **(ii)** (3,17) **(iv)** 2 বর্গ একক **(v)** (0,0)

কষে দেখি - 21

1. **(iv)** 6 **(ii)** 3 **(iii)** 6 **(i)** – 3

2. **(a)** 5 **(b)** $3\sqrt{2}$

3. **(a)** $a = \frac{1}{10}b^2$ **(b)** $x = \frac{1}{1000}y^2$

4. **(a)** 0 **(b)** $\frac{3}{2}$ **(c)** 1 **(d)** 2

10. **(a)** x = 3 **(b)** x = 64

12. **(i)** (a) **(ii)** (c) **(iii)** (d) **(iv)** (a) **(v)** (a)

13. **(i)** 0 **(ii)** 0 **(iv)** $\sqrt{5}$

গণিতের পরিভাষান্তর (Terminology of Mathematics)

অকুব্জ বহুভুজ - Concave Polygon
অখণ্ড সংখ্যা - Whole Number
অঙ্ক - Digit
অঙ্কন - Construction
অতিভুজ - Hypotenuse
অনুপাত - Ratio
অনুভূমিক - Horizontal
অনুরূপ কোণ - Corresponding Angle
অনন্য - Unique
অন্তঃকেন্দ্র - Incentre
অন্তঃস্থ কোণ - Interior Angle
অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ - Interior Opposite Angle
অন্তঃবৃত্ত - Incircle
অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক - Internal Bisector
অর্ন্তলিখিত - Inscribed
অপনয়ন পদ্ধতি - Method of Elimination
অপ্রকৃত ভগ্নাংশ - Improper Fraction
আপেক্ষিক পরিসংখ্যা - Relative Frequency
অবিচ্ছিন্ন চল - Continuous Variable
অবঘাতন - Evolution
আবৃত্ত দশমিক - Recurring Decimal
অভেদ - Identity
অমূলদ সংখ্যা - Irrational Number
অসীম অনাবৃত্ত দশমিক - Non Terminating and Non Recurring Decimal
অসংখ্য - Infinite
অসংজ্ঞাত - Undefined
আয়তক্ষেত্র - Rectangular region
আয়তলেখ - Histogram
আয়তাকার চিত্র - Rectangle
উচ্চতা - Height
উদ্‌ঘাতন - Involution
ঊর্ধ্বক্রম - Ascending Order
উপপাদ্য - Theorem
উল্লম্ব - Vertical
উৎপাদক - Factor
উৎপাদকে বিশ্লেষণ - Factorisation
ঋণাত্মক - Negative
একক - Unit
একান্তর কোণ - Alternate Angle
একপদী সংখ্যামালা - Monomial Expression
ঐকিক নিয়ম - Unitary Method
কুব্জ বহুভুজ - Convex Polygon
কোটি - Ordinate
কর্ণ - Diagonal
কোণ - Angle
কেন্দ্রীয় কোণ - Angle Subtended at the Centre
ক্রয়মূল্য - Cost Price
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যান - Cumulative frequency
ক্ষতি - Loss
ক্ষেত্রফল - Area
ক্ষুদ্রতর - Smaller
গুণ - Multiplication
গুণ-লক্ষণ বা গুণ - Attribute
গুণ্য - Multiplicand
গুণক - Multiplier
গুণফল - Product
গ.সা.গু.-গরিষ্ঠ সাধারণ গুণণীয়ক - Highest Common Factor or Greatest Common Divisor (H.C.F. or G.C.D.)
ঘটনা - Event
ঘটনা দেশ - Event Space
ঘাত - Power
ঘনক - Cube
ঘনফল - Volume
ঘনমূল - Cube Root
চতুর্ভুজ - Quadrilateral
চাঁদা - Protractor
চারপদী সংখ্যামালা - Tetranomial Expression
চল - Variable
ছেদক - Transversal
ছেদবিন্দু - Point of Intersection

ছাড় - Discount
তথ্য - Data
তুলনামূলক পদ্ধতি - Method of Comparison
ত্রিভুজ - Triangle
ত্রিপদী সংখ্যামালা - Trinomial Expression
ত্রৈরাশিক - Rule of Three
দৈর্ঘ্য - Length
দ্বিপদী সংখ্যামালা - Binomial Expression
দ্বি-মাত্রিক - Two Dimentional
ধনাত্মক - Positive
ধ্রুবক - Constant
ধার্যমূল্য - Marked Price
নিধান - Base
নমুনা দেশ - Sample space
নিম্নক্রম / অধ:ক্রম - Descending Order.
পাইচিত্র/বৃত্তক্ষেত্রাকার চিত্র - Pie chart
প্রকৃত ভগ্নাংশ - Proper Fraction
পূর্ণবর্গ - Perfect Square
পূর্ণসংখ্যা - Integer
পূর্ণঘনসংখ্যা - Perfect Cube
পাদ - Quadrant
পাদ ত্রিভুজ - Pedal Triangle
প্রমাণ - Proof
প্রমাণিত - Proved
প্রসার - Range
পরিসংখ্যা - Frequency
পরিসংখ্যার শতকরা হার- Percentage Frequency
পরিলিখিত - Circumsribed
পরিমিতি - Mensuration
পরিসংখ্যা বহুভুজ - Frequency Polygon
পরিসংখ্যা ঘনত্ব - Frequency Density
পরিবর্ত পদ্ধতি - Method of Substitution
পরিবৃত্ত - Circum Circle
পরিকেন্দ্র - Circum Centre
পরিব্যাসার্ধ - Circum Radius
পূরক কোণ - Complementary Angle
পূরক ঘটনা - Complementary Event
পঞ্চভূজ - Pentagon
প্রস্থ - Breadth
প্রবৃদ্ধ কোণ - Reflex angle

বিক্রয়মূল্য - Selling Price
বর্গ - Square
বর্গমূল - Square Root
বর্গক্ষেত্র - Square Region
বর্গাকার চিত্র - Square
বিচ্ছেদ নিয়ম - Distributive Law
বিচ্ছিন্ন চল - Discrete Variable
বজ্রগুণনপদ্ধতি - Method of Cross Multiplcation
বীজ - Root
বীজগাণিতিক সংখ্যামালা - Algebraic Expression
বৃত্ত - Circle
বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ - Radius of Circle
বৃত্তাকার - Circular
বৃত্তকলা - Sector
বৃত্তের পরিধি - Circumference of a circle
বৃত্তের ব্যাস - Diameter of a circle
বৃত্তাকার চাকতি - Circular Disc
বিনিময় নিয়ম - Commutative Law
বিপ্রতীপ কোণ - Vertically Opposite Angle
ব্যস্ত সমানুপাতী - Inversely Proportional
বাস্তব সংখ্যা - Real Number
বিষমবাহু ত্রিভুজ - Scalene Triangle
বাহু - Side
বহিঃসমদ্বিখণ্ডক - External Bisector
বহুপদী সংখ্যামালা - Polynomial Expression
বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য- Zeros of a Polynomial
বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণ - Polynomial Equation
বহিঃস্থ কোণ - Exterior Angle
বৃহত্তর - Greater
বহুভুজ - Polygon
বিয়োগ - Subtraction
বিয়োগফল (অন্তর) - Difference
ভাগ - Division
ভাগফল - Quotient
ভাগশেষ - Remainder
ভগ্নাংশ - Fraction
ভুজ - Abscissa
ভাজ্য - Dividend

ভাজক	-	Divisor
ভূমি	-	Base
ভরকেন্দ্র	-	Centroid
মূলদ সংখ্যা	-	Rational Number
মূলবিন্দু	-	Origin
মৌলিক সংখ্যা	-	Prime Number
মৌলিক উৎপাদক	-	Prime factor
মিশ্রণ	-	Mixture
মধ্যবিন্দু	-	Mid point
যোগ	-	Addition
যোগফল	-	Sum
রৈখিক সমীকরণ	-	Linear Equation
রম্বস	-	Rhombus
রশ্মি	-	Ray
লেখচিত্র	-	Graph
লব	-	Numerator
লাভ	-	Profit
লম্ব	-	Perpendicular
লম্ববিন্দু	-	Orthocentre
ল.সা.গু.-লঘিষ্ঠ সাধারণগুণিতক	-	Least Common Multiple (L.C.M.)
শতকরা	-	Percentage
শূন্য পদ্ধতি	-	Vanishing Method
শ্রেণি সীমানা	-	Class-boundary
শ্রেণি অন্তর	-	Class Interval
শ্রেণি পরিসংখ্যা	-	Class Frequency
শ্রেণি সীমা	-	Class Limit
শ্রেণি দৈর্ঘ্য	-	Class-length
শীর্ষবিন্দু	-	Vertex
শীর্ষকোণ	-	Vertical Angle
সূচক	-	Index/Exponent
সূত্র	-	Formula
স্বতঃসিদ্ধ	-	Axiom
স্তম্ভচিত্র	-	Bar graph
সিদ্ধ	-	Satisfy
সাধারণ বাহু	-	Common Side
সাধারণ উৎপাদক	-	Common Factor
সন্নিহিত কোণ	-	Adjacent Angle

স্থানাঙ্ক	-	Coordinates
সর্বসমতা/সর্বসম	-	Congruence / Congruent
স্বাভাবিক সংখ্যা	-	Natural Number
স্বীকার্য	-	Postulate
সমতুল্য ভগ্নাংশ	-	Equivalent Fraction
সমরেখ	-	Collinear
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ	-	Isosceles Triangle
সমবাহু ত্রিভুজ	-	Equilateral Triangle
সমদ্বিখণ্ডিত করা	-	Bisect
সমদ্বিখণ্ডক	-	Bisector
সমবিন্দু	-	Concurrent
সমসম্ভব পরীক্ষা	-	Random Experiment
সামান্য ভগ্নাংশ	-	Vulgar Fraction
সমান্তরাল সরলরেখা	-	Parallel Lines
সমীকরণ	-	Equation
সমাধান	-	Solution
সমানুপাত	-	Proportion
সমাধান করা	-	Solve
সামান্তরিক	-	Parallelogram
সমকোণ	-	Right Angle
সম্পূরক কোণ	-	Supplementary Angle
সম্ভাবনা	-	Probability
সরল করা	-	Simplify
সরলরেখা	-	Straight Line
সরলরেখাংশ	-	Straightline Segment
সরল সমানুপাতী	-	Directly Proportional
স্থূলকোণ	-	Obtuse Angle
সসীম দশমিক	-	Terminating Decimal
সুষম বহুভুজ	-	Regular Polygon
সহগ	-	Coefficient
সহ সমীকরণ	-	Simultaneous Equations
সংখ্যা	-	Number
সংখ্যামালা	-	Expression
সংযোগ নিয়ম	-	Associative Law
সূক্ষ্মকোণ	-	Acute Angle
হর	-	Denominator
X-অক্ষ	-	X-axis
Y-অক্ষ	-	Y-axis

শিখন পরামর্শ

- জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখা (NCF) - 2005-এর পরামর্শ এই যে শিক্ষার্থী যেন তার বিদ্যালয় জীবন ও বিদ্যালয়ের বাইরের জীবনের সঙ্গে সর্বদা সংযোগ ঘটাতে পারে। এই নথি নির্দেশ করে যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন কেবলমাত্র বই থেকে না হয়। শুধুমাত্র বই থেকে শিক্ষা হলে শিক্ষার্থীর শিক্ষায় বিদ্যালয়, বাড়ি এবং সমাজ থেকে শিক্ষার ভেতর একটি ফাঁকের সৃষ্টি হয়। জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখার এই মূল দৃষ্টির উপর ভিত্তি করেই বর্তমান পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি ও পাঠ্যবই তৈরি করা হয়। এই নথি আরও পরামর্শ দেয় যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন বিষয়কেন্দ্রিক না হয়। বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে যতটা সম্ভব সে যেন সম্পর্ক খুঁজে পায়।
- আশা করা যায়, শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যখন এই পাঠ্যবইটি ব্যবহার করবেন যতটা সম্ভব এই নথি ও নীচের পরামর্শ অনুধাবন করবেন।
- বর্তমানে শিক্ষা শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক। শিক্ষিকা/শিক্ষক সহায়ক মাত্র। অর্থাৎ শিক্ষার্থী যে জন্মের পর থেকেই বাড়ি, পরিবেশ, সমাজ থেকে অনেক কিছুই শিখে ফেলে সেটা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা খেয়াল রাখবেন। কোনো বিষয় জানানোর আগে সেই বিষয়ে শিক্ষার্থীর পূর্বে অর্জিত জ্ঞানের দিকে খেয়াল রেখে সহায়তা করবেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা বা যুক্তি কোনোভাবে যাতে আটকে না যায়, সে যেন মুক্ত চিন্তায় যেতে পারে সেদিকে সর্বদা খেয়াল রাখবেন।
- পাঠ্যবই শিক্ষার্থীর শিক্ষার একটি সহায়ক মাত্র। একমাত্র সহায়ক নয়। শিক্ষার্থীর শিক্ষা যাতে আনন্দদায়ক হয়ে ওঠে তার জন্য বিভিন্ন শিখন সম্ভারের সাহায্য নেওয়া প্রয়োজন এবং প্রয়োজনে শিক্ষার্থীর চাহিদা মতো বিভিন্ন সমস্যা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা শ্রেণিকক্ষে তৈরি করে দেবেন যাতে শিক্ষার্থীর শ্রেণি অনুযায়ী কোনো অধ্যায়ের জ্ঞান অসম্পূর্ণ না থাকে।
- গণিত শিক্ষায়, শিক্ষার্থীর যেন মূর্ত বস্তুর ধারণা থেকে বিমূর্তের ধারণা জন্মায়। তা না হলে শিক্ষার্থীর কাছে গণিত বিষয় একটি ভয়ের কারণ হয়ে ওঠে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যে অধ্যায়ে সম্ভব শিক্ষার্থীর পরিচিত পরিবেশ থেকে কিছু বাস্তব সমস্যা তৈরি করে গণিতের কোনো অধ্যায় শুরু করেন। তারপর সম্ভব হলে সক্রিয়তাভিত্তিক কাজের (Activity) মাধ্যমে সেই অধ্যায় সম্পর্কে শিক্ষার্থীর মনে যুক্তিপূর্ণ ধারণার জন্ম দেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা ও যুক্তির স্বচ্ছতা আসার পরেই যেন সে বিমূর্ত বিষয় নিয়ে কাজ করে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন লক্ষ রাখেন শিক্ষার্থী পাঠ্যবইটি থেকে নিজে নিজেই কতদূর পর্যন্ত কোনো একটি অধ্যায় শিখতে পারে। যখন সে ওই অধ্যায়ের কোনো একটি অংশ শিখতে বাধাপ্রাপ্ত হয় তখনই তাঁরা যেন ধীরে ধীরে সহায়তা করেন, যাতে সে সমস্যাটি সমাধানের পথ নিজেই খুঁজে পায়।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা কোনো অধ্যায় সম্পর্কে প্রথমে শিক্ষার্থীর কাছে এমনভাবে গল্প বলবেন যাতে শিক্ষার্থী প্রথমে কিছু বুঝতে না পারে যে তাকে কিছু শেখানো হচ্ছে।
- দলগত শিক্ষণ শিক্ষার্থীর পক্ষে শিখনে যথেষ্ট সহায়ক হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষক শ্রেণিকক্ষে সেদিকটি খেয়াল রাখবেন।
- বর্তমান শিক্ষায় শিক্ষার্থীকে পাঠদান বা কিছু তথ্য জানানো নয়, শিক্ষার্থী যাতে জ্ঞান গঠন করতে পারে সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা লক্ষ রাখবেন। শিক্ষার্থী জ্ঞান গঠন করতে পারলেই সে ধীরে ধীরে অনেক বিষয়ের মধ্যে গণিত খুঁজতে চাইবে এবং গণিত বিষয়টি তার কাছে আনন্দদায়ক হয়ে উঠবে।
- শিক্ষার্থী যাতে মনে মনে তাড়াতাড়ি কোনো অঙ্ক করতে পারে (মানসাঙ্ক) সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন। গণিতের প্রতিটি অধ্যায় থেকেই শিক্ষার্থী যদি মানসাঙ্ক করতে শেখে তাহলে শিক্ষার্থীর চিন্তা, যুক্তি ও গণনা করার ক্ষমতা তাড়াতাড়ি তৈরি হয়।
- শিক্ষার্থী গণিতের কোনো অধ্যায় শেখার সময় শিক্ষিকা/শিক্ষকরা ওই অধ্যায়ের উপর এমনভাবে যদি একটি তালিকা তৈরি করেন যাতে ওই অধ্যায় থেকে শিক্ষার্থীর শিখনের যতগুলি সম্ভাবনা থাকে সবগুলিই সে শেখে। যেমন, বহুপদী সংখ্যামালার ক্ষেত্রে —

  1) বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।

  2) একপদী, দ্বিপদী, ত্রিপদী ইত্যাদি বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।

3) একঘাত, দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ইত্যাদি বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।
4) বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যের ধারণা।
5) শূন্য বহুপদীর ধারণা।
6) বহুপদী সংখ্যামালাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের (শূন্য ছাড়া) ধারণা ইত্যাদি।

- যে-কোনো অধ্যায়ের কিছু Open ended প্রশ্ন থাকা প্রয়োজন।

a) যেমন একটি মূলদ সংখ্যা লেখ।
b) প্রথম পাদে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লেখ।
c) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য লেখ যাতে বৃত্তাকার ক্ষেত্রদুটির অনুপাত 4 : 9 হয়।
d) তিনটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য লেখ যাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বাহুর উপর অবস্থিত।

- এরকম সম্ভাবনা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরা আরও তৈরি করলে তাঁদের পক্ষে শিক্ষার্থীর আরহিত জ্ঞান মৌলিক কিনা বুঝতে সুবিধা হবে।
- গণিতের কোনো প্রক্রিয়া শিক্ষার্থী যেন না বুঝে মুখস্থ করে না নেয়। প্রত্যেকটি প্রক্রিয়া যেন সে যুক্তি দিয়ে বুঝতে পারে কেন হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষকরা সেদিকে যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন।
- শ্রেণিকক্ষে শিক্ষিকা/শিক্ষকের দেওয়া কোনো সমস্যা কোনো শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি সমাধান করে যেন চুপ করে বসে না থাকে। যে শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি অধ্যায়টি বুঝে এগিয়ে যাচ্ছে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা তাকে আরও কঠিন থেকে কঠিনতর যুক্তি নির্ভর সমস্যা দিয়ে এগিয়ে দেবেন। আর যে ধীরে ধীরে এগোচ্ছে তাকে ধীরে ধীরে যুক্তির বিকাশ ঘটিয়ে ওই অধ্যায়ের যে সামর্থ্য কাম্য সেটায় পৌঁছোতে সাহায্য করবেন।

1. সর্বভারতীয় বোর্ড এবং কাউন্সিলের পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচির মাধ্যে সামঞ্জস্য রাখার জন্য নবম শ্রেণিরও পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচিতে পরিবর্তন করা হয়েছে।
2. একাদশ শ্রেণির গণিতের পাঠ্যসূচির সাথে সামঞ্জস্য রাখার জন্য নবম শ্রেণির গণিতে বিভিন্ন নতুন অধ্যায় সংযুক্ত করা হয়েছে।
3. নবম শ্রেণির ‘গণিত প্রকাশ’ বইয়ে পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি, রাশিবিজ্ঞান অধ্যায়গুলি আলাদাভাবে নেই। কারণ, পাটিগণিতের একটি অধ্যায়ের সঙ্গে বীজগণিতের একটি অধ্যায় বা জ্যামিতির একটি অধ্যায়ের সঙ্গে পরিমিতির একটি অধ্যায় পরস্পরযুক্ত। যেমন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা বা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা এই সূত্রগুলি পরিমিতির প্রয়োগের ক্ষেত্রে ব্যবহার করতে হলে জ্যামিতির ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য জানা প্রয়োজন। আবার, পাটীগণিতে লাভ ও ক্ষতির সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে বীজগণিতের রৈখিক সহসমীকরণের সমাধান জানা প্রয়োজন।

   অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা যেন কোনো সূত্র মুখস্থ বিদ্যার (Rote Learning) উপর নির্ভর না করে কেন হয় জেনে প্রয়োগ করতে পারে। তাই গণিতের বিভিন্ন শাখার অধ্যায়গুলি পাঠ্যপুস্তকে সেভাবে সাজান হয়েছে।
4. পরিশিষ্টে সেট তত্ত্ব ও সম্ভাবনা তত্ত্ব সংযোজিত হয়েছে যা নবম শ্রেণির মূল্যায়নের অন্তর্ভূক্ত নয়। কিন্তু যে সমস্ত শিক্ষার্থী বিভিন্ন প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় আগ্রহী তারা যাতে নিজেরাই পাঠ্যপুস্তক থেকে পড়ে কিছুটা জ্ঞান আহরণ করে ও সেই অর্জিত জ্ঞান প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় প্রয়োগ করতে পারে।
5. পাঠ্যপুস্তকে প্রতিটি অধ্যায়ের প্রথমে না দিয়ে শেষে বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন এবং সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। কারণ শিক্ষার্থীদের যাতে বড় সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে অধ্যায়টি সম্বন্ধে ধারণা সম্পূর্ণ হয় এবং তারপর ওই ধরনের সমস্যা যাতে তারা খুব তাড়াতাড়ি করতে পারে।
6. শ্রেণিকক্ষের ও বাস্তবের সমস্যা বুঝে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরাই শিক্ষার্থীর যুক্তিপূর্ণ আনন্দদায়ক শিক্ষার জন্য পাঠ্যবইটিকে কেমন করে আরও ভালোভাবে ব্যবহার করা যাবে সেটিরও পরামর্শ জানাবেন যাতে ভবিষ্যতে পাঠ্যবইটি নিখুঁত ও সর্বাঙ্গীন সুন্দর হয়।

পাঠ পরিকল্পনা

মাস	অধ্যায়
January	1. বাস্তব সংখ্যা 2. সূচকের নিয়মাবলি
February	3. লেখচিত্র 4. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : দূরত্ব নির্ণয়
March	5. রৈখিক সহ সমীকরণ (দুই চল বিশিষ্ট) 6. সামান্তরিকের ধর্ম
April	7. বহুপদী সংখ্যামালা 8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ
May	9. ভেদক ও মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য 10. লাভ ও ক্ষতি
June	11. রাশিবিজ্ঞান
July	12. ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য 13. সম্পাদ্য : ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কন যার একটি কোণের পরিমাপ নির্দিষ্ট 14. সম্পাদ্য : চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন
August	15. ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল 16. বৃত্তের পরিধি
September	17. সমবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য 18. বৃত্তের ক্ষেত্রফল
October	19. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : সরলরেখাংশের অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত 20. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
November	21. লগারিদ্ম